

Садржај

1. Увод	2
2. Поставка проблема	4
3. Математички модел синхроног мотора са перманентним магнетима на ротору и општа анализа губитака снаге.....	6
3.1 Математички модел синхроног мотора са перманентним магнетима на ротору	6
3.2 Општа анализа снаге губитака	8
3.2.1 Снага губитака у бакру.....	8
3.2.2 Снага губитака у гвожђу	9
3.2.3 Снага губитака у инвертору.....	12
4. Моделовање снаге губитака у бакру статорских проводника са утицајем скин ефекта и ефекта близине.....	14
4.1 Површински ефекат и ефекат близине код проводника у жлебу електричне машине	14
4.2 Функција <i>faktorKR.m</i>	29
4.3 Нормализација фактора отпорности K_R	34
4.4 Утицај промене броја проводника у жлебу на статорску отпорност, индуктивност и флукс статорског намотаја који потиче од перманентног магнета	41
4.5 Функција <i>otpornorm.m</i>	43
4.6 Снага губитака статорског намотаја за дати режим рада	46
5. Рад синхроне машине са перманентним магнетима на ротору у области слабљења поља	50
5.1 Израчунавање струје демагнетизације у области слабљења поља за дати режим рада.....	50
5.2 Функција <i>struje.m</i>	55
6. Моделовање снаге губитака у гвожђу синхроне машине са перманентним магнетима на ротору	57
6.1 Одређивање компоненти и резултантне магнетске индукције у зазору синхроне машине са перманентним магнетима на ротору	57
6.2 Функција <i>gvozdje.m</i>	65
7. Оптимизација снаге губитака у синхронном мотору са перманентним магнетима на ротору	67
7.1 Критеријум оптимизације	67
7.2 Функција <i>glavni.m</i>	71
8. Закључак	73
Прилог	75
Литература	81

1. Увод

Синхрони мотори са перманентним магнетима на ротору имају велики степен корисног дејства, с тога што у њима нема снаге губитака у ротору који постоје код асинхроних мотора. Велики степен корисног дејства синхроних мотора са перманентним магнетима на ротору је разлог њихове широке примене у свим оним случајевима где је битно имати малу снагу губитака, где је проблем одвести топлоту која се у мотору ствара услед губитака, као и у оним применама где је потребно имати велику специфичну снагу.

Наиме, једна од особина синхроних мотора са перманентним магнетима на ротору је и велика специфична снага. Како су њихови губици релативно мали, може се радити са већим вредностима индукције и густине струје и тако постићи већи момент и снаге из једнаке запремине и тежине мотора.

Наведене особине синхроне моторе са перманентним магнетима на ротору чине идеалним кандидатима за примену у аутомобилској индустрији. У оквиру савременог аутомобила постоји тенденција да се обједине све електричне машине које су у аутомобилу покретне, а то су: електропокретач који обезбеђује да се покрене машина са унутрашњим сагоревањем, потом алтернатор који током рада машине са унутрашњим сагоревањем даје потребну електричну енергију и пуни батерију, као и сам покретачки мотор који се користи код хибридних и електричних аутомобила за обављање вуче, тј. за покретање аутомобила. Досадашња решења укључују уградњу засебне електричне машине за сваку од ових функција.

Не постоје техничке или функционалне препреке које би спречиле да се све три поменуте функције, а то је вуча, генерисање електричне енергије и покретање СУС мотора не обједине у једној јединственој електричној машини.

У овом правцу усмерен је развој савремених аутомобила. Поред тога, примена синхроних мотора са перманентним магнетима на ротору могућа је и у спортским, односно тркаћим аутомобилима, где се све чешће користе уређаји за рекуперацију енергије кочења, односно *KERS* (*KINETIC ENERGY RECOVERY SYSTEM*).

Уређај за рекуперацију енергије кочења састоји се из једног реверзибилног електромоторног погона и акумулатора електричне енергије. У току кочења кинетичка енергија која се одузима возилу у оквиру електричне машине, која тада ради као генератор, претвара се у електричну енергију која се похрањује у оквиру некаквог акумулатора. Тај акумулатор електричне енергије може бити хемијски извор струје (оловни, никл-кадмијумски, литијум-јонски акумулатори) или може бити тзв. суперкондензатор. То је направа која у веома малом габариту остварује

капацитивности од неколико десетина фарада и тако омогућује акумулацију значајних количина електричне енергије.

Овако похрањена електрична енергија у спортском аутомобилу може се искористити за побољшање карактеристика код убрзања, тј. остварење краћег времена убрзања, тако што би се у фази убрзања акумулирана енергија усмеравала у електричну машину која тада ради као мотор и чије је вратило спрегнуто са вратилима мењача тркачког аутомобила, те би тако електрична машина доприносила моменту и покретачкој сили самог тркачког аутомобила и тако скратила време залетања. У свему овоме потребно је остварити релативно велике вршне снаге између десет и стотину kW, које се развијају у кратким временским интервалима, рецимо 5-10 секунди, у интервалима неколико минута, дакле са таквом једном интерминтенцијом.

Међутим, потребно је створити електричну машину која је малог габарита, значи малог волумена и мале тежине, како би се могла сместити у тркачки аутомобил, не увећавајући претерано његове димензије и тежину. Потребно је дакле имати велику специфичну густину снаге.

Предмет овог рада је оптимизација снаге губитака синхроне машине са перманентним магнетима на ротору која ради у области слабљења поља, у циљу постизања што мањих губитака при истој корисној снази машине. То ће омогућити постизање већих снага у синхроној машини при истим губицима тј. при истом систему хлађења.

2. Поставака проблема

Проблем дизајна синхроне машине са перманентним магнетима на ротору способне за развијање великих вршних вредности снаге и малог габарита предмет је научне расправе која се спроводи у оквиру овог рада.

Познато је да у области електричне вуче, електричних аутомобила, спортских аутомобила, постоји потреба за остварењем механичке карактеристике која укључује широку зону слабљења поља. Дакле, синхрони мотор са перманентним магнетима на ротору мора бити начињен тако да може остварити задовољавајуће перформансе и онда када ради у зони слабљења поља. Стварање побуде уз помоћ перманентних магнета отежава процес слабљења поља код оваквих мотора. Наиме, да би се слабило поље и тако повећала брзина обртања мотора, неопходно је реализовати такве статорске струје које имају негативну d компоненту струје. Другим речима, потребно је остварити такве статорске струје које једним делом умањују флуks створен магнетима, односно раде тзв. демагнетизацију. При мањим брзинама та тзв. демагнетизациона компонента струје се може уклонити чиме се рестаурира претходна вредност флуksа.

Проблем са слабљењем поља код синхроних мотора са перманентним магнетима на ротору огледа се у томе што демагнетизациона струја резултује додатним губицима снаге. Наиме, негативна вредност струје i_d увећава ефективну вредност струје статора, па су тада и губици снаге у статорском намотају већи.

Поред тога, увећава се и флуks расипања статора што доводи до повећања додатних губитака у гвожђу који постоје поглавито у зупцима а последица су расипног флуksа.

Када се узме у обзир да је циљна машина типично четворополна, и да има брзину обртања реда величине 30000 об/мин, закључује се да је основна компонента флуksа и струје простопериодична са фреквенцијом од 1 КHz из чега се даље може закључити да ће флуks расипања у зупцима машине пулсирати на фреквенцији од 1 КHz. Због овога, поменути додатни губици снаге у зупцима машине услед расипног флуksа ће бити релативно велики.

Уколико би се смањио укупни број навојака статорског намотаја, тада би се смањила и електромоторна сила индукована у статору, па би се могло избећи коришћење слабљења поља. Избегла би се потреба за увођењем слабљења поља. Самим тим би се избегла и нежељена d компонента струје, или демагнетизациона струја, па би и сви поменути проблеми о којима је говорено били уклоњени. Са друге стране смањењем броја навојака увећава се потребна ефективна вредност струје статора за стварање исте магнетопобудне силе статора и истог момента.

Тако би се повећали и губици у проводницима и у енергетском претварачу који напаја машину. Поред тога коришћење веће струје и мањег броја проводника већег попречног пресека значајно би увећало губитке услед скин ефекта који се јавља на фреквенцијама од 1 КHz што управо и јесте очекивана фундаментална фреквенција основних облика у машини. Дакле, умањење броја навојака има своје позитивне и негативне консеквенце.

Увећањем броја навојака умањује се скин ефекат, али се значајно увећава потребна демагнетизациона струја, а самим тим и ефективна вредност струје повећавајући губитке у бакру и инвертору .

У оквиру рада даће се практични аналитички изрази на основу којих је могуће проценити губитке у синхроној машини са перманентним магнетима на ротору и у претварачу за напајање машине. Треба имати у виду чињеницу да секундарни ефекти, као што су скин ефекат и додатни губици у овом случају када је фундаментална фреквенција реда величине 1 КHz не могу бити занемарени, већ да врло лако могу постати доминантне компоненте у губицима снаге.

На основу аналитичких израза и приближних формула биће приказана оптимизација која ће се спровести са циљем да се за конкретну машину утврди оптималан број навојака који треба одабрати како би се постигле најбоље могуће перформансе.

3. Математички модел синхроног мотора са перманентним магнетима на ротору и општа анализа губитака снаге

3.1 Математички модел синхроног мотора са перманентним магнетима на ротору

Избором синхроно ротирајућег координатног система са осама d и q , и спровођењем обртне трансформације променљивих стања добија се модел синхроне машине са перманентним магнетима на ротору у коме су променљиве стања непроменљиве при раду. Пројекције вектора струје, напона и флукса на осе новог координатног система су константне у стационарним стањима. У стационарном стању, обртно поље статора синхроне машине обрће се синхроно са ротором. Оса d ротирајућег координатног система се поставља тако да лежи на правцу у коме постоји вектор роторског флукса, створен деловањем перманентних магнета. У случају када је ротор цилиндричне структуре, магнетски отпор не зависи од правца у коме се простире поље тако да су индуктивности виртуелних намотаја у d и q оси једнаки, тј. $L_d = L_q = L_s$ и такве структуре називамо изотропним.

Једначине напонске равнотеже у стационарном стању су:

$$U_d = R_s \cdot I_d - \omega_m \cdot \Psi_q \quad (3.1.1)$$

$$U_q = R_s \cdot I_q + \omega_m \cdot \Psi_d \quad (3.1.2)$$

где су:

$$\Psi_d = L_s \cdot I_d + \Psi_{Rm} \quad \text{флуксни обухват намотаја статора у } d \text{ оси} \quad (3.1.3)$$

$$\Psi_q = L_s \cdot I_q \quad \text{флуксни обухват намотаја статора у } q \text{ оси} \quad (3.1.4)$$

Флукс Ψ_{Rm} представља део побудног флукса створеног перманентним магнетима на ротору који обухвата и статорске намотаје. Будући да је оса d постављена колинеарно са роторским флуksom, флукс Ψ_{Rm} лежи у директној оси тако да је његова пројекција на попречну осу једнака нули.

Рад у стационарном стању подразумева да се ротор обрће синхроним брзином тако да је $\Omega_m = \Omega_s$. За учестаност статорских струја ω_s , синхрона брзина Ω_s , којом се врти статорско поље, једнака је $\Omega_s = \omega_s / p$, тако да је $\Omega_m = \Omega_s = \omega_s / p = \omega_m / p$. То значи да је брзина обртања dq система одређена брзином ротора Ω_m . Како је веза електричне учестаности и механичке брзине обртања код мотора са више пари полова $\omega = p \cdot \Omega$, учестаност која се јавља у једначини равнотеже напона једнака је $\omega_m = p \cdot \Omega_m$.

Снага обртног магнетског поља која се преноси ротору захваљујући електромагнетској интеракцији поља у ваздушном зазору износи:

$$P_{em} = \frac{3}{2} \omega_s \cdot (\Psi_d \cdot I_q - \Psi_q \cdot I_d) \quad (3.1.5)$$

Како на ротору синхроног мотора са перманентним магнетима нема губитака снаге, примљена снага P_{em} се конвертује у механичку и постаје унутрашња механичка снага машине $P_{em} = P_{mR}$.

Увођењем релација за флуксне обухвате намотаја статора у d и q оси у израз за снагу обртног магнетског поља који је дефинисан релацијом (3.1.5), уз услов да је $P_{em} = P_{mR}$, добија се:

$$P_{mR} = \frac{3}{2} \cdot \omega_s \cdot \Psi_{Rm} \cdot I_q \quad (3.1.6)$$

Унутрашња механичка снага је једнака производу електромагнетског момента којим статор, путем спрежног поља, делује на ротор, и брзине обртања ротора $\Omega_m = \Omega_s = \omega_s / p$.

Дакле, електромагнетски момент се израчунава као:

$$M_{em} = \frac{P_{mR}}{\Omega_s} \quad (3.1.7)$$

односно

$$M_{em} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_{Rm} \cdot I_q \quad (3.1.8)$$

3.2 Општа анализа снаге губитака

Доминантни губици у машини су губици у бакру и губици у гвожђу. Поред ових губитака постоје и додатни електрични, те механички губици. Додатни губици настају као последица расипног флукса у структурним деловима машине, те присуства виших хармоника у спектру напона и струје напајања. Механички губици настају као последица трења и вентилације и на њих се може утицати регулацијом електричних величина у погону.

У овом раду пажња је усмерена према доминантним губицима.

Губици у бакру зависе од ефективне вредности струје, а губици у гвожђу од индуковане електромоторне силе, односно амплитуде флукса и учестаности.

Поред губитака у машини постоје и губици у претвараачу.

3.2.1 Снага губитака у бакру

Губици снаге у бакру зависе од отпорности намотаја и ефективне вредности струје која постоји у њему. Основна релација по којој се ови губици одређују дата је следећом формулом:

$$P_{Cu} = 3 \cdot R \cdot I^2 \quad (3.2.1.1)$$

где су:

P_{Cu} - губици у бакру;

R - отпорност мерена једносмерном струјом;

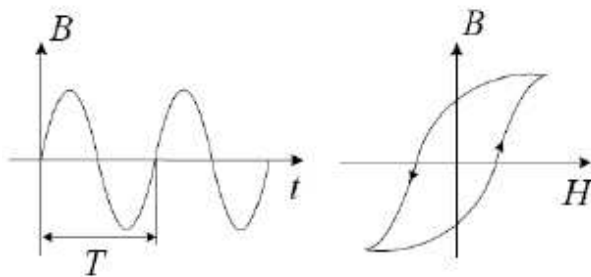
I - ефективна вредност наизменичне струје;

Међутим, на вишим фреквенцијама долази до ефекта потискивања струје у проводницима статора ка периферији, што резултује повећањем еквивалентне отпорности намотаја, а самим тим и повећањем Џулових губитака. Детаљнији опис додатних губитака снаге у проводницима услед скин ефекта дат је поглављу 4.

3.2.2 Снага губитака у гвожђу

Магнетско коло статора синхроне машине са перманентним магнетима на ротору се формира од гвоздених лимова који су електрично изоловани међусобом. Магнетска индукција се мења на простопериодичан начин. Пулсација магнетског поља у феромагнетском материјалу проузрокује губитке снаге. Они се деле на губитке услед вихорних струја и губитке услед хистерезиса.

Снага губитака услед хистерезиса:



Пулсација магнетског поља у феромагнетику изискује покретање магнетских дипола и промену њихове оријентације. Ротација дипола изискује утрошак енергије који може бити процењен на следећи начин. Када магнетна индукција простопериодично пулсира тада радна тачка у $B(H)$ дијаграму описује хистерезисну криву. Енергија утрошена на ротацију дипола у једном циклусу T пропорционална је површини хистерезисне криве коју радна тачка описује. Енергија се троши на унутрашње трење и претвара се у топлоту.

Снага губитака одређује се тако што се енергија утрошена у једном циклусу помножи са фреквенцијом: $f = \frac{1}{T}$.

Снага губитака сведена на јединичну запремину или јединичну тежину назива се специфична снага. Специфична снага губитака услед хистерезиса p_H пропорционална је површини хистерезисне петље у $B(H)$ дијаграму и фреквенцији, при чему је σ_{H1} коефицијент пропорционалности.

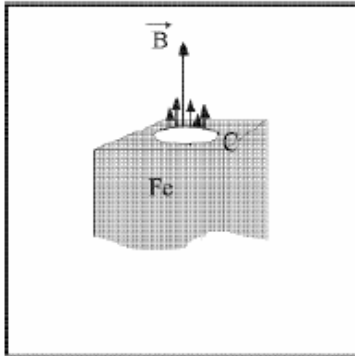
$$p_H = \frac{\Delta P}{\Delta m} \left[\frac{W}{Kg} \right] = \sigma_{H1} \cdot S_{BH} \cdot \frac{1}{T} = \sigma_{H1} \cdot S_{BH} \cdot f \quad (3.2.2.1)$$

Површина хистерезисне криве зависи од производа максималних вредности јачине магнетског поља и јачине магнетске индукције, тако да је S_{BH} пропорционално квадрату вршне вредности јачине магнетске индукције.

Специфични губици у гвожђу услед хистерезиса се могу записати као

$$p_H \left[\frac{W}{Kg} \right] = \sigma_{H1} \cdot f \cdot B_m^2 \quad (3.2.2.2)$$

Снага губитака услед вихорних струја:



Посматрајмо простопериодично поље B које пулсира у хомогеном комаду гвожђа, у вертикалном правцу, нормалном на контуру која је означена са C . У контури C ће се индуковати електромоторна сила, пропорционална изводу флукса:

$$e_C \sim \frac{d}{dt}(\Psi_C) \sim \frac{d}{dt}(S_C \cdot B_m \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

$\Psi_C \rightarrow$ укупни флуксни обухват кроз контуру C

$S_C \rightarrow$ површина контуре

$\omega \rightarrow$ кружна учестаност

Амплитуда електромоторне силе индуковане у контури пропорционална је учестаности и вршној вредности магнетске индукције: $e_C \sim \omega \cdot B_m \sim 2 \cdot \pi \cdot f \cdot B_m$

Контура поседује коначну отпорност R_C , јер је гвожђе добар проводник. Струја која се успоставља у контури пропорционална је електромоторној сили, а обрнуто пропорционална отпорности: $i_C \approx e_C / R_C \approx \omega \cdot B_m / R_C$. Губици снаге у контури, па и укупни губици услед вихорних струја у гвожђу су пропорционални квадрату учестаности и квадрату вршне вредности магнетске индукције:

$$P_C \sim R_C \cdot i_C^2 \sim \frac{1}{R_C} \omega^2 \cdot B_m^2 \rightarrow P_V \approx k \cdot \omega^2 \cdot B_m^2 \quad (3.2.2.3)$$

Специфични губици снаге (тј. губици снаге у делу магнетског кола јединичне тежине) услед вихорних струја се могу исказати као:

$$p_V \left[\frac{W}{Kg} \right] = \sigma_V \cdot f^2 \cdot B_m^2 \quad (3.2.2.4)$$

Магнетско коло начињено од лимова се назива ламинираним. Ламинација је паралелна са пољем, док су контуре у којима се индукују вихорне струје нормалне на правац поља. Изолација између суседних лимова стоји на путу вихорних струја, тако да се оне могу успоставити само унутар лима. На овај начин се могу значајно умањити губици услед вихорних струја.

Специфична снага губитака у феромагнетском материјалу је:

$$p_{Fe} \left[\frac{W}{Kg} \right] = \sigma_H \cdot f \cdot B_m^2 + \sigma_V \cdot f^2 \cdot B_m^2 \quad (3.2.2.5)$$

Код савремених електричних машина које се користе у електричним возилима, хибридним аутомобилима радна фреквенција може бити већа од 1 КHz. Магнетско коло савремених машина се прави од лимова веома мале дебљине (0.05-0.1mm), од аморфних трака на бази легура гвожђа, мангана и других метала, као и од ферита. Ферит је материјал који се добија од усијане легуре гвожђа која се под притиском потискује у бризгаљку са узаним отвором. Истопљена легура се тако распршује у капљице лоптастог облика, пречника реда величине 50 μ m. Краткотрајна оксидација ових капљица ствара веома танак слој изолујућег оксида. Минијатурне лоптице падају у уље које их хлади. Прикупљањем се добија фина прашина сачињена од изолованих феромагнетских сфера. Сабијањем ове прашине под притиском (синтеровање) добија се тврди материјал који се назива ферит, са повољним магнетским особинама и веома малим губицима услед вихорних струја.

3.2.3 Снага губитака у инвертору

Губитке снаге у инвертору делимо на комутационе и кондукционе губитке.

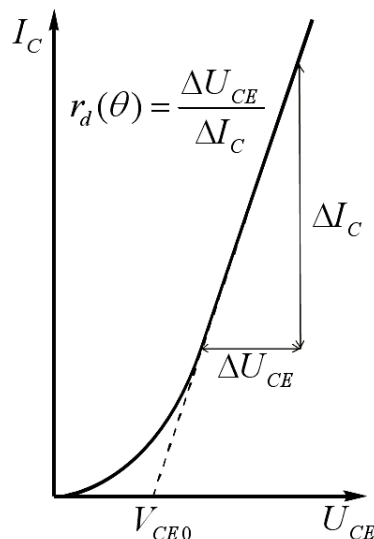
Комутациони губици у инвертору:

Комутациони губици у инвертору су поседица комутација прекидачких елемената. Наиме, колико год брзе биле комутације транзистора и диода, они нису идеални прекидачи. Губици при комутацији транзистора се јављају због тога што се напони и струје транзистора не могу променити тренутно. Последица овога је да имамо производ напона и струје, тј. снагу дисипације која у појединим тренуцима има заиста велике вредности. Механизам комутације диоде, тј. инверзни опоравак диоде проузокује комутационе губитке диоде.

У овом раду комутационе губитке занемарујемо због батеријског напајања инвертора, односно машине.

Кондукциони губици у инвертору:

Кондукциони губици на прекидачу инвертора потичу од пада напона на прекидачу у стању провођења. Код ИГБТ-а пад напона од колектора ка емитеру се може представити редном везом електромоторне силе (статички напон ИГБТ-а) и динамичке отпорности. Ова два параметра се добијају из каталожних података, тј. са графика зависности колекторске струје I_C од напона колектор-емитер V_{CE} :



Слика 3.2.3.1 Зависност колекторске струје од напона колектор-емитер

$$u_{CE}(t) = V_{CE0} + r_d(\theta) \cdot i_{CE}(t)$$

где је: $-u_{CE}(t)$ - пад напона на прекидачу од колектора ка емитеру

$-V_{CE0}$ - статички напон ИГБТ-а

$-r_D(\theta)$ - динамичка отпорност прекидача зависна од температуре θ

$-i_{CE}(t)$ - струја прекидача од колектора ка емитеру

Пошто је зависност колекторске струје I_C од напона колектор-емитер V_{CE} линеарна, можемо инвертор посматрати апроксимативно као отпорник.

На основу тога губитке у инвертору рачунамо као:

$$P_{inv} = R_{invnom} \cdot I^2 \quad (3.2.3.1)$$

при чему је:

R_{invnom} - номинална отпорност инвертора

I - ефективна вредност наизменичне струје

У нашем случају I је струја статорског намотаја се рачуна према релацији (5.1.6).

4. Моделовање снаге губитака у бакру статорских проводника са утицајем скин ефекта и ефекта близине

4.1 Површински ефекат и ефекат близине код проводника у жлебу електричне машине

Око проводника у коме постоји електрична струја ствара се магнетско поље. Како је проводник положен у статорски жлеб, линије магнетног поља теже да се затворе тако да је магнетски отпор на путу линија поља најмањи. Због тога линије магнетског поља су несиметрично расподељене у односу на осу симетрије проводника која је нормална на бочне странице жлеба.

У случају наизменичне струје, електрично поље изазвано самоиндукцијом неравномерно се расподељује по пресеку проводника што за последицу има неравномерну расподелу струје и њено потискивања ка отвору жлеба. Ако је фреквенција струје висока, струја постоји практично само у врло танком слоју уз површину проводника. По томе граничном слоју појава неравномерне расподеле временски променљиве струје у проводницима добила је назив *скин ефекат* или површински ефекат. Та појава доводи до повећања Џулових губитака у намотајима електричне машине и до повећања отпорности намотаја.

Временски променљиво магнетско поље има исту особину: вектор магнетске индукције у проводницима има највећи интензитет уз површину проводника.

Временски променљива струја у једном проводнику утиче на расподелу струје у другом блиском проводнику. Тај ефекат се назива *ефекат близине*.

Сва ова три важна ефекта потичу од индукованог електричног поља које прати временски променљиво магнетско поље.

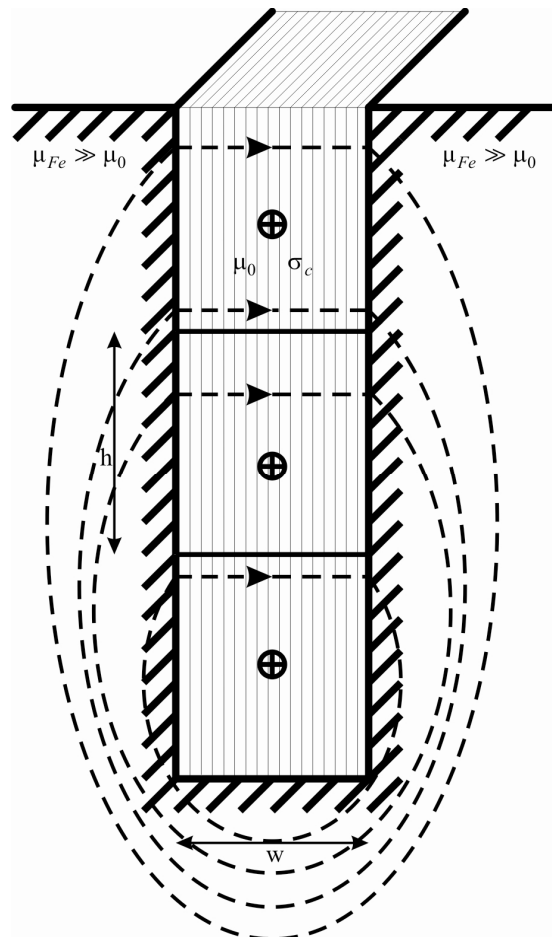
Анализу проблема расподеле струје у проводнику радимо под следећим претпоставкама:

- 1) Сви проводници који леже у истом жлебу припадају истом фазном намотају, тако да у њима постоји иста струја (истог фазног става и ефективне вредности);
- 2) Проводници имају правоугаони пресек и по ширини жлеба смештен је само један проводник. Ширина проводника једнака је ширини жлеба w ;

- 3) По висини може бити смештено више проводника али су сложени један на други тако да се изолација између њих може занемарити;
- 4) Дубина жлеба је неколико пута већа од његове ширине;
- 5) Пошто је магнетска пермеабилност гвожђа много већа од пермеабилности ваздуха и бакарних проводника μ_0 , може се занемарити магнетски отпор на путу флукса кроз гвожђе.

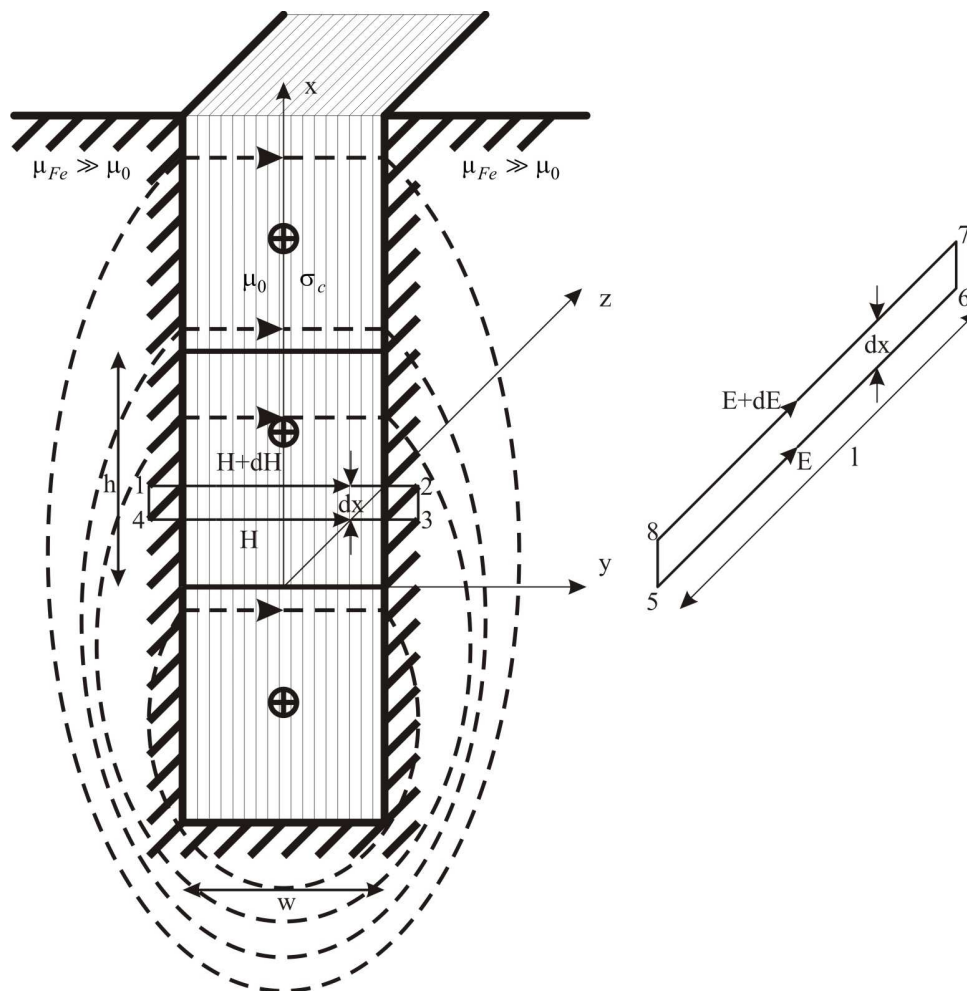
Пошто је $\mu_{Fe} \gg \mu_0$, линије магнетске индукције у жлебу су врло приближно нормалне на бочне зидове жлеба, а због услова 4) може се сматрати да су праве по целој ширини жлеба (праве паралелне оси y). Следећи пут мањег магнетског отпора, линије магнетског поља се затварају кроз гвожђе, обилазећи жлеб са доње стране.

Ток линија магнетског поља ја квалитативно приказан испрекиданим линијама на слици 4.1.1:



Слика 4.1.1 – Квалитативан приказ линија магнетског поља у жлебу са три проводника у жлебу

Да бисмо одредили закон по коме се мења јачина поља у жлебу, а преко њега и закон расподеле густине струје, уочимо један од проводника, на пример n -ти проводник, при чему ћемо проводнике бројати од дна жлеба ка његовом отвору. Ако се координатни систем постави као на слици 4.1.2 вектори индукованог електричног поља \vec{E} и густине струје \vec{J} су паралелни оси z , а вектор магнетског поља \vec{H} је паралелан оси y . Координатни почетак ћемо поставити у доњу површину n -тог проводника.



Слика 4.1.2 – Приказ усвојеног координатног система и контура на којима се примењује Амперов и Фарадејев закон

Вектор густине струје \vec{J} и вектор индукованог електричног поља \vec{E} у проводнику имају само z- компоненту, тј. : $E_x = 0$, $E_y = 0$, док је $E_z = \frac{J_z}{\sigma_c}$. Вектор магнетског поља \vec{H} има само y - компоненту, тј. $H_x = 0$, $H_z = 0$, док је $H_y = H$.

Примењујући Амперов закон: $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ на елементарну правоугаону контуру 1-2-3-4-1 са слике 4.1.2, чија је висина dx а ширина w , имамо:

$$\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot w - H_y \cdot w = J_z \cdot w \cdot dx$$

из чега налазимо да је:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = J_z \quad (4.1.1)$$

Са друге стране примењујући Фарадејев закон индукције: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ на елементарну правоугаону контуру 5-6-7-8-5 са слике 4.1.2, чија је висина dx и дужина l , имамо:

$$E_z \cdot l - \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot l = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \cdot l \cdot dx,$$

из чега налазимо да је:

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

тј.

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

односно

$$\frac{\partial J_z}{\partial x} = \mu_0 \cdot \sigma_c \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (4.1.2)$$

Ако се једначина (4.1.1) парцијално диференцира по x добије се парцијална диференцијална једначина:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \frac{\partial J_z}{\partial x} \quad (4.1.3)$$

Водећи рачуна о (4.1.2) једначина (4.1.3) се може написати у облику:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \mu_0 \cdot \sigma_c \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (4.1.4)$$

Када се магнетско поље мења по простопериодичном закону времена можемо увести комплексну представу величина, па се јачина магнетског поља може написати као:

$$H_y = \underline{H} \cdot e^{j\omega t}, \quad (4.1.5)$$

где је \underline{H} комплексна амплитуда магнетског поља, која је функција само од координате x .

Ако се за једначину (4.1.4) усвоји решење облика (4.1.5), тада се решавање једначине своди на просто раздвајање променљивих. После уврштавања усвојеног решења и скраћивања фактора $e^{j\omega t}$ добија се обична диференцијална једначина по једној променљивој облика:

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} - j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c \cdot \underline{H} = 0 \quad (4.1.6)$$

односно

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} - r^2 \cdot \underline{H} = 0 \quad (4.1.7)$$

где је

$$r^2 = j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c \quad (4.1.8)$$

Опште решење ове линеарне једначине са константним коефицијентом има облик :

$$\underline{H} = C_1 \cdot e^{r \cdot x} + C_2 \cdot e^{-r \cdot x} \quad (4.1.9)$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе и

$$r = \sqrt{j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c} \quad (4.1.10)$$

Пошто је $\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + j)$, можемо писати

$$r = (1 + j) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c} = (1 + j) \cdot \alpha, \quad (4.1.11)$$

где је

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c} \left[\frac{1}{m} \right]. \quad (4.1.12)$$

На дубини $\delta = \frac{1}{\alpha}$ [m] амплитуда вектора магнетског поља(и струје) опадне на $\frac{1}{e}$ своје вредности уз граничну површ.

Та дубина назива се дубина продирања струје (и поља) у проводник и она је инверзна коефицијенту α .

Циркулација вектора \vec{H} по затвореној контури, која се подудара са неком од линија магнетског поља, једнака је укупној струји коју та контура обухвата:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

Због претпоставке 5) може се приближно узети да је:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H(x) \cdot w \quad (4.1.13)$$

$H(x)$ је јачина магнетског поља на праволинијском делу контуре, w ширина проводника, тј. жлеба, а координата x се рачуна од дна жлеба.

Пошто са порастом координате x расте и укупна струја обухваћена контуром, то значи да и јачина поља у жљебу $H(x)$ расте идући од дна ка отвору жљеба.

Константе C_1 и C_2 се одређују из граничних услова на доњој и горњој површини n -тог проводника.

Ако замислимо да се проводници састоје од бесконачног броја слојева који су положени на различитој дубини у жлебу, расипна индуктивност доњег слоја је већа него горњег, јер је доњи слој обухваћен већим расипним флуksom. С обзиром да је струја наизменична, у горњим слојевима са малом реактансом струја је много већа него у доњим слојевима, тј. струја се потискује ка врху жлеба. Поред тога, струја горњих слојева фазно предњачи у односу на струју доњих слојева. Неравномерна расподела струје доводи до повећања еквивалентног отпора и релативно мањег смањења еквивалентне индуктивности расипања. С обзиром да расподела струје зависи од индуктивног дејства, еквивалентни отпор је функција учестаности.

Ако се Амперов закон примени на линију магнетског поља која се у жлебу поклапа са доњом ивицом пресека n -тог проводника ($x=0$) онда је :

$$\underline{H}(0) \cdot w = (n-1) \cdot \underline{I} \quad (4.1.14)$$

где је \underline{I} струја у једном проводнику и она је иста у свим проводницима истог жлеба, док је $(n-1) \cdot \underline{I}$ укупна струја која пролази кроз посматрану контуру.

За горњу ивицу пресека n -тог проводника ($x=h$) важи:

$$\underline{H}(h) \cdot w = n \cdot \underline{I} \quad (4.1.15)$$

Према томе, добија се систем од две једначине са две непознате:

$$C_1 + C_2 = (n-1) \cdot \frac{\underline{I}}{w} \quad (4.1.16)$$

$$C_1 \cdot e^{r \cdot h} + C_2 \cdot e^{-r \cdot h} = n \cdot \frac{\underline{I}}{w} \quad (4.1.17)$$

Решавањем овога система добијамо константе C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{\underline{I}}{2 \cdot w \cdot \text{sh}(r \cdot h)} \cdot (n - (n-1) \cdot e^{-r \cdot h}) \quad (4.1.18)$$

$$C_2 = \frac{\underline{I}}{2 \cdot w \cdot \text{sh}(r \cdot h)} \cdot ((n-1) \cdot e^{r \cdot h} - n) \quad (4.1.19)$$

Заменом константи C_1 и C_2 у израз (4.1.9) добијамо расподелу магнетског поља у жлебу:

$$\underline{H}(x) = \frac{\underline{I}}{w} \cdot \frac{n \cdot \text{sh}(r \cdot x) - (n-1) \cdot \text{sh}(r \cdot (x-h))}{\text{sh}(r \cdot h)} \quad (4.1.20)$$

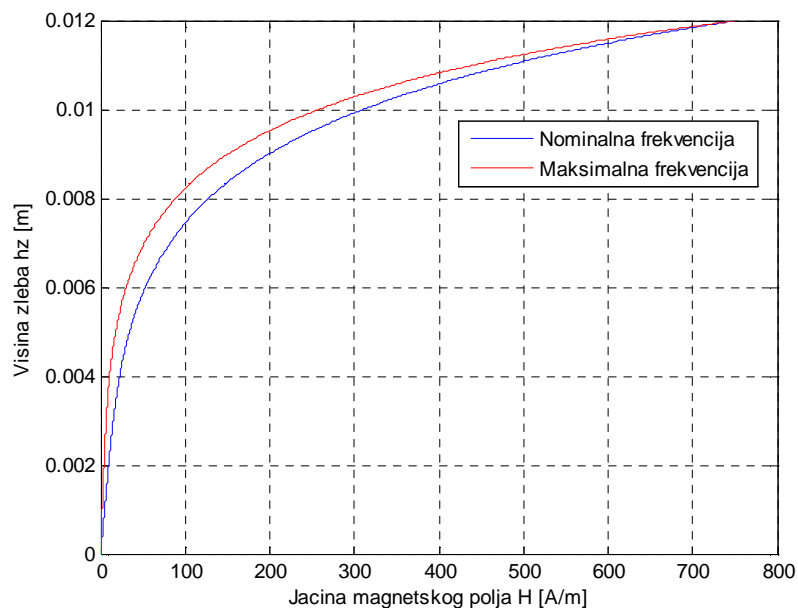
Густина струје у n - том проводнику у жлебу се рачуна преко релације (4.1.1) која у комплексном облику гласи:

$$\underline{J}(x) = \frac{\partial \underline{H}(x)}{\partial x}.$$

Дакле,

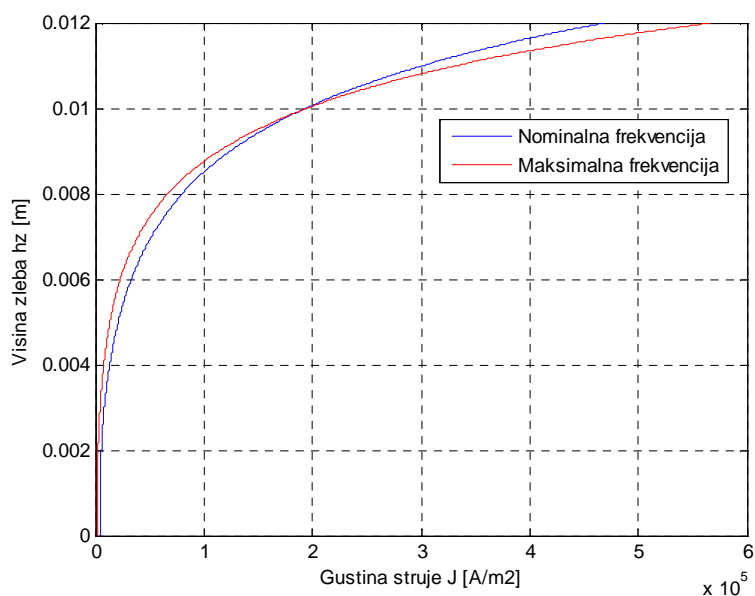
$$\underline{J}(x) = \frac{\underline{I}}{w} \cdot r \cdot \frac{n \cdot \text{ch}(r \cdot x) - (n-1) \cdot \text{ch}(r \cdot (x-h))}{\text{sh}(r \cdot h)} \quad (4.1.21)$$

На слици (4.1.3) је приказана промена јачина магнетског поља по висини жлеба за случај једног проводника у жлебу. Јачина магнетског поља у жлебу расте идући од дна жлеба ка његовом отвору.



Слика 4.1.3 – Промена јачине магнетског поља по висини жлеба за случај једног проводника у жлебу

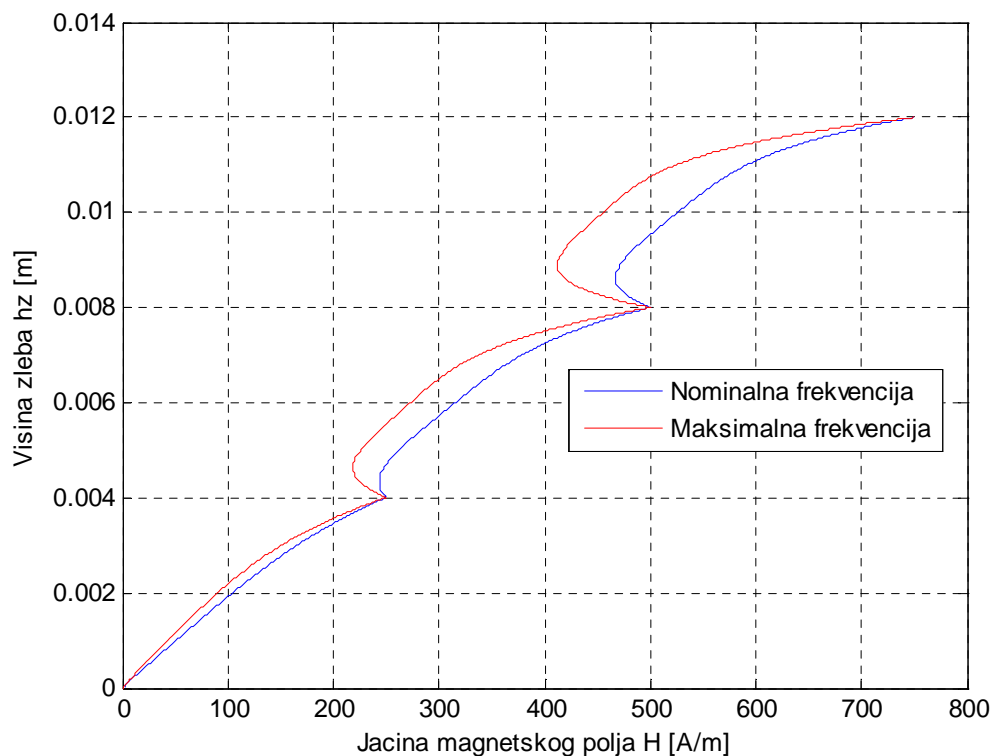
На слици (4.1.4) је приказано како се мења густина струје по висини жлеба за случај једног проводника у жлебу. Може се приметити да густина струје има највеће вредности уз површину проводника, а опада идући ка његовој унутрашњости.



Слика 4.1.4 – Промена густине струје по висини жлеба за случај једног проводника у жлебу

Када у жлебу има више проводника, на расподелу густине струје у другом и свим вишим проводницима не утиче само магнетско поље посматраног проводника, већ и магнетска поља свих проводника који се налазе ниже у жлебу због индукваног електричног поља које прати временски променљиво магнетско поље.

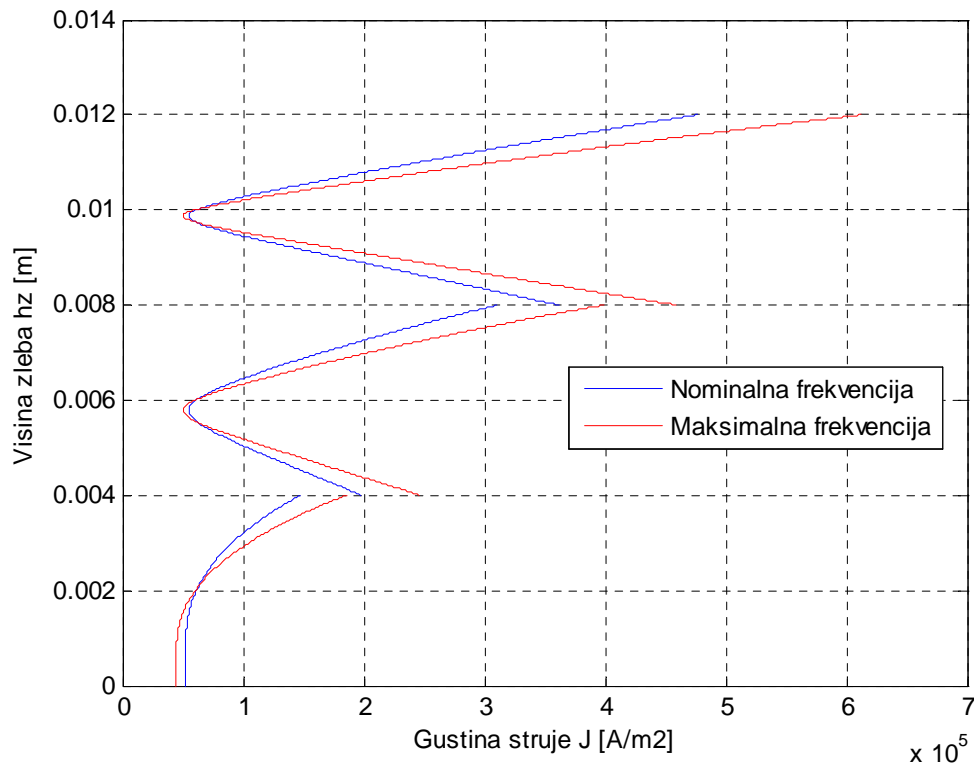
На слици (4.1.5) је приказано како се мења јачина магнетског поља по висини жлеба за случај три проводника у жлебу.



Слика 4.1.5 – Расподела модула јачине магнетског поља када се у жлебу налазе три проводника

Густине струје у граничним површинама суседних проводника нису у општем случају једнаке ни по амплитуди ни по фази. Ово се објашњава тиме што се фаза густине струје континуално мења са висином и у једном једином проводнику .

На слици (4.1.6) је приказано како се мења густина струје по висини жлеба за случај три проводника у жлебу.



Слика 4.1.6 – Расподела модула густине струје када се у злебу налазе три проводника један изнад другог

Пошто познајемо расподелу густине струје у проводнику можемо израчунати Џулове губитке снаге у проводнику. Интезитет струје у подужном исечку проводника дебљине dx и ширине w износи $\underline{J} \cdot w \cdot dx$. Отпорност исечка проводника дужине l , дебљине dx и ширине w износи: $\frac{l}{\sigma_c \cdot w \cdot dx}$. Стога снага губитака у подужном исечку проводника износи:

$$dP_{AC} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{J} \cdot w \cdot dx)^2 \cdot \frac{l}{\sigma_c \cdot w \cdot dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot w}{\sigma_c} \cdot |\underline{J}|^2 \cdot dx ,$$

при чему је $|\underline{J}|$ модул амплитуде густине струје.

Укупна снага губитака у n -том проводнику се добија из израза:

$$P_{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot w}{\sigma_c} \cdot \int_0^h |\underline{J}|^2 \cdot dx \quad (4.1.22)$$

$$P_{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot w \cdot r^2 \cdot I^2}{\sigma_c \cdot w^2} \cdot \int_0^h \left| \frac{n \cdot ch(r \cdot x) - (n-1) \cdot ch(r \cdot (x-h))}{sh(r \cdot h)} \right|^2 dx$$

Како је $|r|^2 = |\alpha + j \cdot \alpha|^2 = (\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2})^2 = 2 \cdot \alpha^2$ добијамо:

$$P_{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot 2 \cdot \alpha^2 \cdot I^2}{\sigma_c \cdot w} \cdot \int_0^h \left| \frac{n \cdot ch(r \cdot x) - (n-1) \cdot ch(r \cdot (x-h))}{sh(r \cdot h)} \right|^2 dx \quad (4.1.23)$$

За даљу анализу и решавање датог интеграла неопходне су следеће тригонометријске релације:

$$\begin{aligned} ch^2(x) - sh^2(x) &= 1, ch^2(x) = \frac{ch(2 \cdot x) + 1}{2}, sh^2(x) = \frac{ch(2 \cdot x) - 1}{2}, \\ ch(x+y) &= ch(x) \cdot ch(y) + sh(x) \cdot sh(y), sh(x+y) = sh(x) \cdot ch(y) + ch(x) \cdot sh(y), \\ ch(j \cdot x) &= \cos(x), sh(j \cdot x) = j \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

У случају када у жлебу постоји само један проводник, или ако посматрамо смо први проводник када их је више у жлебу, изрази (4.1.20), (4.1.21) и (4.1.23) добијају једноставан облик:

$$\underline{H}(x) = \frac{I}{w} \cdot \frac{sh(r \cdot x)}{sh(r \cdot h)} \quad (4.1.24)$$

$$\underline{J}(x) = \frac{I}{w} \cdot r \cdot \frac{ch(r \cdot x)}{sh(r \cdot h)} \quad (4.1.25)$$

$$P_{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot 2 \cdot \alpha^2 \cdot I^2}{\sigma_c \cdot w} \cdot \int_0^h \left| \frac{ch(r \cdot x)}{sh(r \cdot h)} \right|^2 dx \quad (4.1.26)$$

Даље је:

$$ch(r \cdot x) = ch((\alpha + j \cdot \alpha) \cdot x) = ch(\alpha \cdot x) \cdot ch(j \cdot \alpha \cdot x) + sh(\alpha \cdot x) \cdot sh(j \cdot \alpha \cdot x)$$

$$ch(r \cdot x) = ch(\alpha \cdot x) \cdot \cos(\alpha \cdot x) + j \cdot sh(\alpha \cdot x) \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

$$|ch(r \cdot x)| = \sqrt{ch^2(\alpha \cdot x) \cdot \cos^2(\alpha \cdot x) + sh^2(\alpha \cdot x) \cdot \sin^2(\alpha \cdot x)}$$

$$|ch(r \cdot x)|^2 = ch^2(\alpha \cdot x) \cdot \cos^2(\alpha \cdot x) + sh^2(\alpha \cdot x) \cdot \sin^2(\alpha \cdot x)$$

Користећи тригонометријске релације долазимо до израза:

$$|ch(r \cdot x)|^2 = \frac{1}{2} \cdot (ch(2 \cdot \alpha \cdot x) + \cos(2 \cdot \alpha \cdot x)) \quad (4.1.27)$$

Можемо у погоднијем облику представити $|sh(r \cdot h)|^2$ као:

$$|sh(r \cdot h)|^2 = sh^2(\alpha \cdot h) + \sin^2(\alpha \cdot h) \quad (4.1.28)$$

Када изразе (4.1.27) и (4.1.28) унесемо у израз (4.1.26) добићемо:

$$P_{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot \alpha^2 \cdot I^2}{\sigma_c \cdot w} \cdot \frac{\int_0^h |ch(r \cdot x)|^2 dx}{sh^2(\alpha \cdot h) + \sin^2(\alpha \cdot h)} \quad (4.1.29)$$

$$\int_0^h |ch(r \cdot x)|^2 dx = \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot sh(2 \cdot \alpha \cdot x) \Big|_0^h + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot \sin(2 \cdot \alpha \cdot x) \Big|_0^h = \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot (sh(2 \cdot \alpha \cdot h) + \sin(2 \cdot \alpha \cdot h))$$

Коначно имамо да је снага Џулових губитка:

$$P_{AC} = \frac{l \cdot \alpha^2 \cdot I^2}{4 \cdot \alpha \cdot \sigma_c \cdot w} \cdot \frac{(sh(2 \cdot \alpha \cdot h) + \sin(2 \cdot \alpha \cdot h))}{sh^2(\alpha \cdot h) + \sin^2(\alpha \cdot h)} \quad (4.1.30)$$

Са друге стране снага Џулових губитака се може представити као:

$$P_{AC} = \frac{1}{2} \cdot R_{AC} \cdot I^2 \quad (4.1.31)$$

одакле се добија да је отпорност:

$$R_{AC} = \frac{l \cdot \alpha^2}{2 \cdot \alpha \cdot \sigma_c \cdot w} \cdot \frac{(sh(2 \cdot \alpha \cdot h) + \sin(2 \cdot \alpha \cdot h))}{sh^2(\alpha \cdot h) + \sin^2(\alpha \cdot h)} \quad (4.1.32)$$

Како је:

$$\alpha^2 = \frac{\sigma_c \cdot \mu_0 \cdot \omega}{2}$$

Коначно се добија:

$$R_{AC} = \frac{l \cdot \mu_0 \cdot \omega}{4 \cdot \alpha \cdot w} \cdot \frac{(sh(2 \cdot \alpha \cdot h) + \sin(2 \cdot \alpha \cdot h))}{sh^2(\alpha \cdot h) + \sin^2(\alpha \cdot h)} \quad (4.1.33)$$

Отпорност једног проводника висине h , ширине w и дужине l у коме постоји једносмерна струја је:

$$R_{DC} = \frac{l}{\sigma_c \cdot w \cdot h} \quad (4.1.34)$$

Однос омског отпора дела намотаја који је подвргнут ефекту потискивања при било којој фреквенцији и отпорности тог истог дела намотаја при униформној расподели струје у жлебу зове се фактор отпорности и означава се са K_R , тј.,

$$K_R = \frac{R_{AC}}{R_{DC}} \quad (4.1.35)$$

$$K_R = \frac{\frac{l \cdot \mu_0 \cdot \omega}{4 \cdot \alpha \cdot w} \cdot \frac{(sh(2 \cdot \alpha \cdot h) + \sin(2 \cdot \alpha \cdot h))}{sh^2(\alpha \cdot h) + \sin^2(\alpha \cdot h)}}{\frac{l}{\sigma_c \cdot w \cdot h}}$$

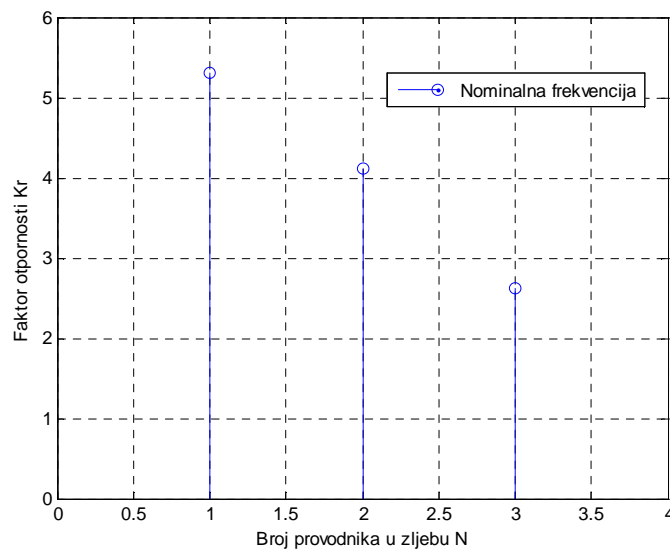
$$K_R = \frac{2 \cdot \alpha^2 \cdot h}{4 \cdot \alpha} \cdot \frac{(sh(2 \cdot \alpha \cdot h) + \sin(2 \cdot \alpha \cdot h))}{sh^2(\alpha \cdot h) + \sin^2(\alpha \cdot h)}$$

$$K_R = \frac{\alpha \cdot h}{2} \cdot \frac{(sh(2 \cdot \alpha \cdot h) + \sin(2 \cdot \alpha \cdot h))}{sh^2(\alpha \cdot h) + \sin^2(\alpha \cdot h)}$$

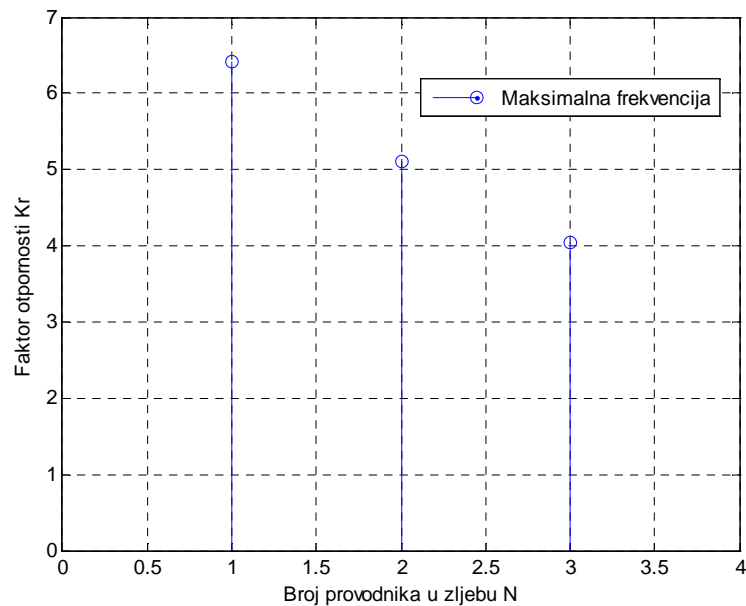
Ако означимо $\alpha \cdot h$ са ξ добија се :

$$K_R = \frac{\xi}{2} \cdot \frac{(sh(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi))}{sh^2(\xi) + \sin^2(\xi)} \quad (4.1.36)$$

Графици зависности фактора отпорности од броја проводника у жлебу за номиналну и максималну фреквенцију приказани су на сликама 4.1.7 и 4.1.8.



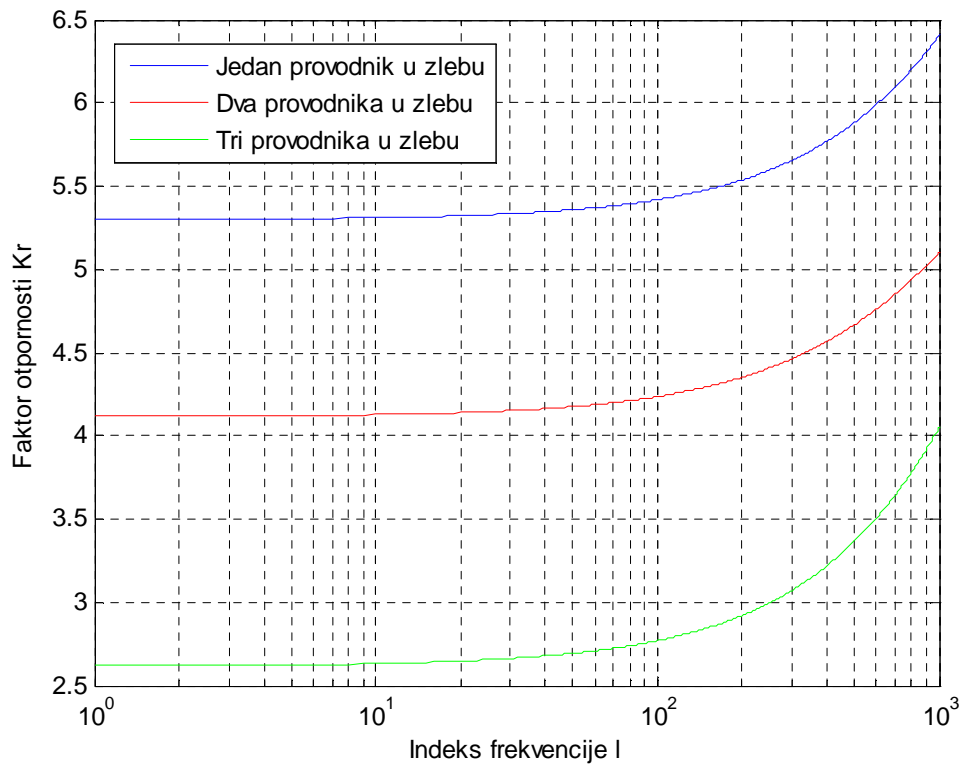
Слика 4.1.7 – Зависност фактора отпорности K_R од броја проводника у жлебу при номиналној фреквенцији



Слика 4.1.8 – Зависност фактора отпорности K_R од броја проводника у жлебу при максималној фреквенцији

Повећањем броја проводника у жлебу смањује се фактор отпорности K_R , тј. утицај скин ефекта. За исти број проводника у жлебу при већој фреквенцији израженији је скин ефекат, тј. фактор отпорности.

График зависности фактора отпорности од фреквенције за случај једног, два и три проводника у жлебу приказан је на слици 4.1.9. Апсциса је представљена индексом фреквенције, у логаритамској размери, ради бољег уочавања зависности фактора отпорности од фреквенције. Зависност фреквенције од индекса фреквенције дефинисан је релацијом (5.2.1)



Слика 4.1.9 – Зависност фактора отпорности K_R од фреквенције за случај једног, два и три проводника у жлебу

4.2 Функција *faktorKR.m*

У функцији *faktorKr.m* која је написана у програмском пакету *Matlab* имплементиран је поступак одређивање фактора отпорности K_R .

Улазни аргумент ове функције су индекс граничне фреквенције, f_{gr} , и број проводника у жлебу N .

Индекс фреквенције l се мења од 1 до f_{gr} са кораком 1. Фреквенција f се мења према релацији:

$$f(l) = 1 + \frac{n_{max} - n_{nom}}{n_{nom}} \cdot \frac{l-1}{f_{gr} - 1} \quad (4.2.1)$$

При чему је n_{max} максимална брзина обртања мотора а n_{nom} номинална брзина обртања у об/мин. За индекс $l=1$ добија се номинална фреквенција и она одговара номиналној брзини обртања. За индекс $l=f_{gr}$ добија се максимална фреквенција и она одговара максималној брзини обртања.

Посматрајмо жлеб у коме је смештен један проводник при чему у проводнику постоји простопериодична струја ефективне вредности I и кружне учестаности ω . Димензије проводника једнаке су димензијама жлеба. Тај проводник ствара магнетопобудну силу $F = I$. Ако желимо да имамо исту магнетопобудну силу по жлебу са N проводника у жлебу струја у сваком од проводника мора бити N пута мања, тј. $I_1 = \frac{I}{N}$. При томе висина једног проводника је N пута мања од висине жлеба, тј. $h = \frac{h_z}{N}$, док сматрамо да је ширина проводника једнака ширини жлеба. Проводници су смештени један на други и везани су редно.

Коефицијенти α и r , из једнакости (4.1.12) и (4.1.11) су функција фреквенције и налазе се у спољашњој петљи по фреквенцији.

Унутрашња петља је петља по броју проводника у жлебу. Број проводника у жлебу је N . За сваки од проводника у жлебу се рачуна струја и висина сваког појединачног проводника у жлебу.

За сваки појединачни проводник од N колико их је у жлебу одређују се интеграционе константе C_1 и C_2 из релација (4.1.18) и (4.1.19). Након одређивања интеграционих константи одређују се модули амплитуде густине струје и јачине

магнетског поља у *корак* тачака висине сваког проводника користећи релације (4.1.20) и (4.1.21).

Нумеричка интеграција користи се за одређивање приближне вредности одређеног интеграла задате функције. У случају да функција има само позитивне вредности, одређени интеграл можемо тумачити као површину ограничену x осом, вертикалним правим линијама за $x = a$ и $x = b$ и са горње функцијом $f(x)$. При тражењу интеграла функције $f(x)$ у границама од a до b :

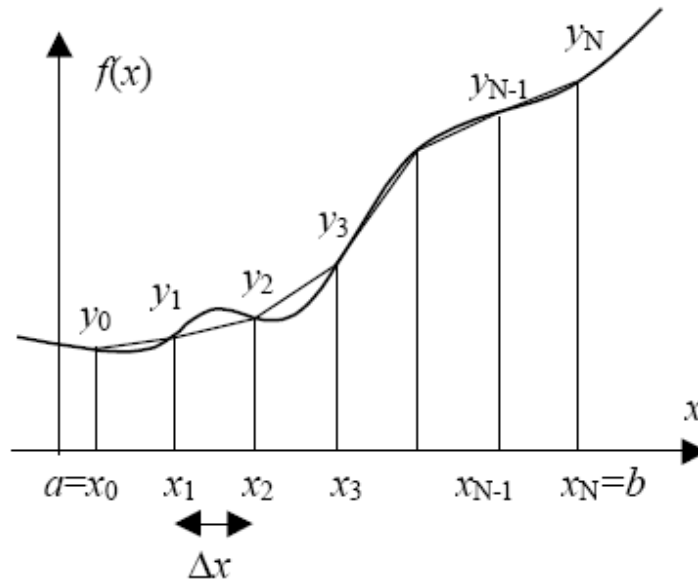
$$\int_a^b f(x) dx \quad (4.2.2)$$

израчунавају се вредност функције у $N + 1$ тачака: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Вредности функције у овим тачкама обележићемо са $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$, при чему је $y_i = f(x_i)$ као на слици (4.2.1). У случају примене трапезног правила приближна вредност посматраног интеграла налази се у облику суме површина одговарајућих трапеза. Узима се да је подела интервала интеграција на N подинтервала равномерна, тј. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x$. За сваки подинтервал (x_i, x_{i+1}) , интеграл функције на том подинтервалу се апроксимира са површином правоугаоног трапеза чији је доњи крак (односно висина) једнак Δx , лева основица има дужину y_i а десна y_{i+1} . Површина оваквог трапеза је:

$$P_i = \Delta x \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2}. \quad (4.2.3)$$

Интеграл се добија сабирајући све ове елементарне површине:

$$I = \frac{\Delta x}{2} \cdot (y_0 + 2 \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + y_n) \quad (4.2.4)$$



Слика 4.2.1 –Графички приказ интерпретације трапезног правила

У нашем конкретном случају применићемо нумеричку интеграцију на интеграл из релације (4.1.22):

$$\int_0^h |\underline{J}|^2 \cdot dx, \quad (4.2.5)$$

при чему је \underline{J} густина струје у n- том проводнику у жлебу у комплексном облику која се рачуна преко релације (4.1.21). Корак интеграције Δx је $\Delta x = \frac{h}{\text{korak}}$ јер се модул амплитуде густине струје одређује у *korak* тачака висине проводника h , а $y_i = f(x_i)$ су квадрати модула амплитуде густине струје за сваку од *korak* тачака висине проводника.

Укупна снага губитака сваког од N проводника у жлебу из релације (4.1.21) добија се множењем израчунатог интеграла из релације (4.2.5) са константом $\frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot w}{\sigma_c}$.

Потребно је одредити средњу вредност фактора отпорности K_R за N проводника у жлебу.

Први корак је одређивање средње вредности снаге губитака у случају наизменичне струје за свих N проводника у жлебу . То одређивање се врши тако што се збир снага губитака сваког појединачног од N проводника, подели бројем проводника, тј. N:

$$P_{AC} = \frac{\sum_{i=1}^N P_{iAC}}{N} \quad (4.2.6)$$

Други корак је одређивање укупне снаге губитака у случају да у проводнику постоји једносмерна струја. Посматрајмо случај када у жлебу постоји само један проводник и у потпуности га испуњава, тј. висина проводника h једнака је висини жлеба h_z . Отпорност једног проводника у коме постоји једносмерна струја интензитета I је:

$$R_{DC} = \frac{l}{\sigma_c \cdot w \cdot h_z} \quad (4.2.7)$$

Као и у случају наизменичне струје ако желимо да имамо исту магнетопобудну силу по жљебу са N проводника у жлебу струја у сваком од проводника мора бити N пута мања, тј. $I_1 = \frac{I}{N}$. При томе висина једног проводника је N пута мања од висине жлеба, тј. $h = \frac{h_z}{N}$, док сматрамо да је ширина проводника једнака ширини жлеба. Проводници су смештени један на други и везани су редно.

Отпорност једног таквог проводника је:

$$R_{DC1} = \frac{l}{\sigma_c \cdot w \cdot h} \quad (4.2.8)$$

односно

$$R_{DC1} = \frac{l}{\sigma_c \cdot w \cdot \frac{h_z}{N}} = \frac{l \cdot N}{\sigma_c \cdot w \cdot h_z} \quad (4.2.9)$$

тј.,

$$R_{DC1} = N \cdot R_{DC} \quad (4.1.10)$$

Снага Џулових губитака једног проводника је:

$$P_{DC1} = \frac{1}{2} \cdot R_{DC1} \cdot I_1^2 \quad (4.2.11)$$

односно

$$P_{DC1} = \frac{1}{2} \cdot N \cdot R_{DC} \cdot \left(\frac{I}{N}\right)^2 \quad (4.2.12)$$

тј.

$$P_{DC1} = \frac{1}{2} \cdot R_{DC} \cdot \frac{I^2}{N} \quad (4.2.13)$$

Пошто су проводници у жлебу редно везани укупна снага Џулових губитака је:

$$P_{DC} = N \cdot P_{DC1} \quad (4.2.14)$$

Уврштавањем израза (4.2.13) у релацију (4.2.14) добијамо:

$$P_{DC} = \frac{1}{2} \cdot R_{DC} \cdot I^2. \quad (4.2.15)$$

Из ове формуле се може закључити да је снага Џулових губитака у случају једносмерне струје иста без обзира да ли је у жлебу један проводник који га испуњава у потпуности или има N проводника који га испуњавају.

Коначно, средња вредност фактора отпорности K_R за N проводника у жлебу се одређује као количник средње вредности снаге губитака у случају наизменичне струје за свих N проводника у жлебу и укупне снаге Џулових губитака у случају једносмерне струје :

$$K_R = \frac{P_{AC}}{P_{DC}} \quad (4.2.16)$$

У функцији *faktorKR.m* фигуришу следећи параметри:

- Максимална брзина обртања ротора: $n_{\max} = 38000 \frac{ob}{min}$
- Номинална брзина обртања ротора: $n_{nom} = 26000 \frac{ob}{min}$
- Висина жлеба: $h_z = 12mm$
- Ширина жлеба је: $w = 4mm$
- Специфична електрична проводност бабра: $\sigma_{Cu} = 57 \frac{MS}{m}$
- Магнетска пермеабилност ваздуха: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$
- Амплитуда струје: $I = 3A$
- Корак интеграције: $korak = 1000$

4.3 Нормализација фактора отпорности K_R

Фактор отпорности K_R који је анализиран у претходном поглављу је функција две променљиве, фреквенције f и броја проводника N , тј. $K_R = g(f, N)$ при чему $N \in \mathbb{Z}$. Синхрони мотори са перманентним магнетима на ротору могу имати различит број навојака. Број навојака статорског намотаја мотора може да варира у зависности од величине мотора и других фактора. Код мотора малих снага за велике напоне тај број може бити изузетно велики, док се код мањих мотора који су батеријски напајани ради о неколико десетина навојака. Савремени начини извођења статорског намотаја омогућују да статорски намотај данас има 1.5 навојак. То се чини елегантним комбинованим повезивањем неколико паралелних грана. Могуће је направити намотај који ефективно има само 1.5 навојак. Сада наш прорачун не може узимати у обзир конкретан број навојака, већ је потребно показати, што је и циљ овог рада, како се може одабрати оптималан број навојака тако да мотор има минималну снагу губитака.

Због тога се у току прорачуна фактора отпорности, он не рачуна у зависности од броја навојака већ у зависности од односа измењеног броја навојака који сматрамо оптималним и номиналног броја навојака који сматрамо почетним. Поред промене функционалне зависности врши се и нормализација фактора K_R . Прорачун не зависи од избора номиналног броја проводника јер се читав прорачун врши са **нормализованим вредностима, односно у систему релативних јединица [r,j]**. Нормализација се врши да би се решење проблема уопштило, пошто у општем случају номиналан број проводника мотора није познат.

Зато ми на хоризонталну осу не стављамо број навојака, него однос измењеног броја навојака који сматрамо оптималним и номиналног броја навојака који сматрамо почетним. На основу овога све параметре и променљиве које фигуришу у моделу синхроне машине са перманентним магнетима, а имају функционалну зависност од броја проводника представљамо у функцији односа броја проводника a . Избор номиналног броја навојака није критичан и од одлучујућег значаја. Као пример, ако је оптимални број навојака 30, а за номинални број навојака смо одабрали 10, онда је $a=3$. Са друге стране ништа се ту не мења ако се за номинални број навојака прогласи 15. Наравно тада је $a=2$, али оптимални број навојака остаје непромењен и једнак 30.

Однос броја проводника a се дефинише као количник измењеног и номиналног броја проводника:

$$a = \frac{N}{N_{\text{nom}}} \quad (4.3.1)$$

при чему је N_{nom} номиналан број проводника а N измењени број проводника.

Одређивање функционалне зависности фактора отпорности од односа броја проводника за дату фреквенцију f , $K_R = g(f, a)$, има више корака.

Као први корак треба да се уради интерполација, тј. одређивање функционалне зависности фактора отпорности K_R од броја проводника N , при чему $N \in R$, за дату фреквенцију f . Та функционална зависност се може приказати полиномом n -ог степена:

$$K_R(N) = b_n \cdot N^n + b_{n-1} \cdot N^{n-1} + b_{n-2} \cdot N^{n-2} + \dots + b_0 \quad (4.3.2)$$

при чему су $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ коефицијенти интерполационог полинома. Коефицијенти интерполационог полинома се одређују коришћењем уграђене функције *polyfit* из програма *Matlab* о чему се бити више речи у опису функције *otpornorm.m*.

Користећи релацију (4.3.1), полином (4.3.2) постаје функција од односа броја проводника a :

$$K_R(a) = b_n \cdot N_{\text{nom}}^n \cdot a^n + b_{n-1} \cdot N_{\text{nom}}^{n-1} \cdot a^{n-1} + b_{n-2} \cdot N_{\text{nom}}^{n-2} \cdot a^{n-2} + \dots + b_0 \quad (4.3.3)$$

односно

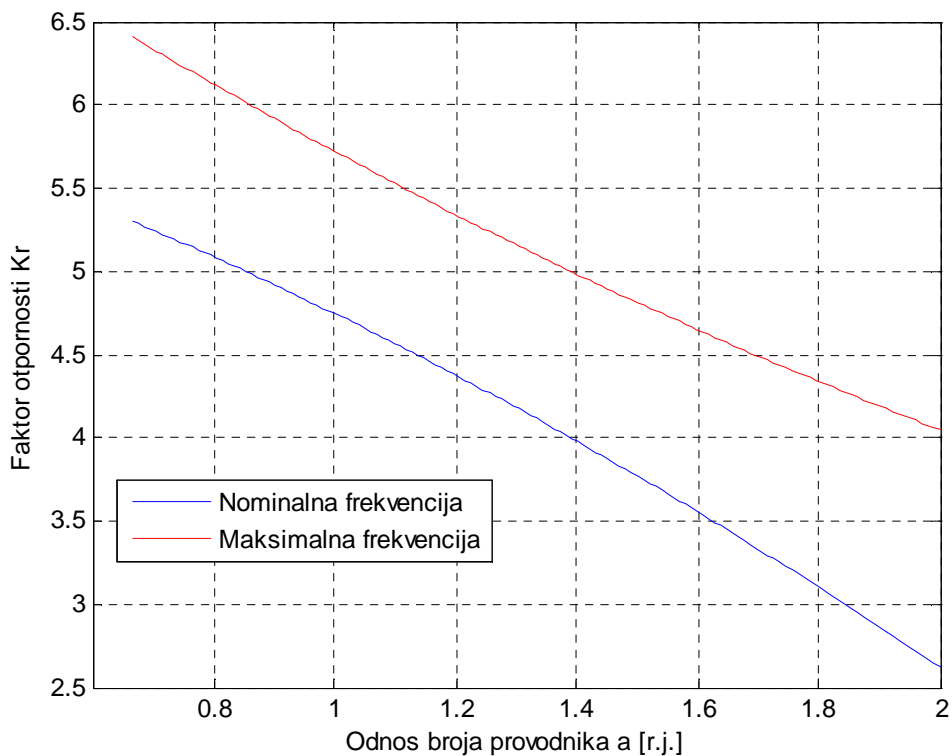
$$K_R(a) = c_n \cdot a^n + c_{n-1} \cdot a^{n-1} + c_{n-2} \cdot a^{n-2} + \dots + c_0, \quad (4.3.4)$$

при чему су:

$$c_n = b_n \cdot N_{\text{nom}}^n, c_{n-1} = b_{n-1} \cdot N_{\text{nom}}^{n-1}, c_{n-2} = b_{n-2} \cdot N_{\text{nom}}^{n-2}, \dots, c_0 = b_0 \quad (4.3.5)$$

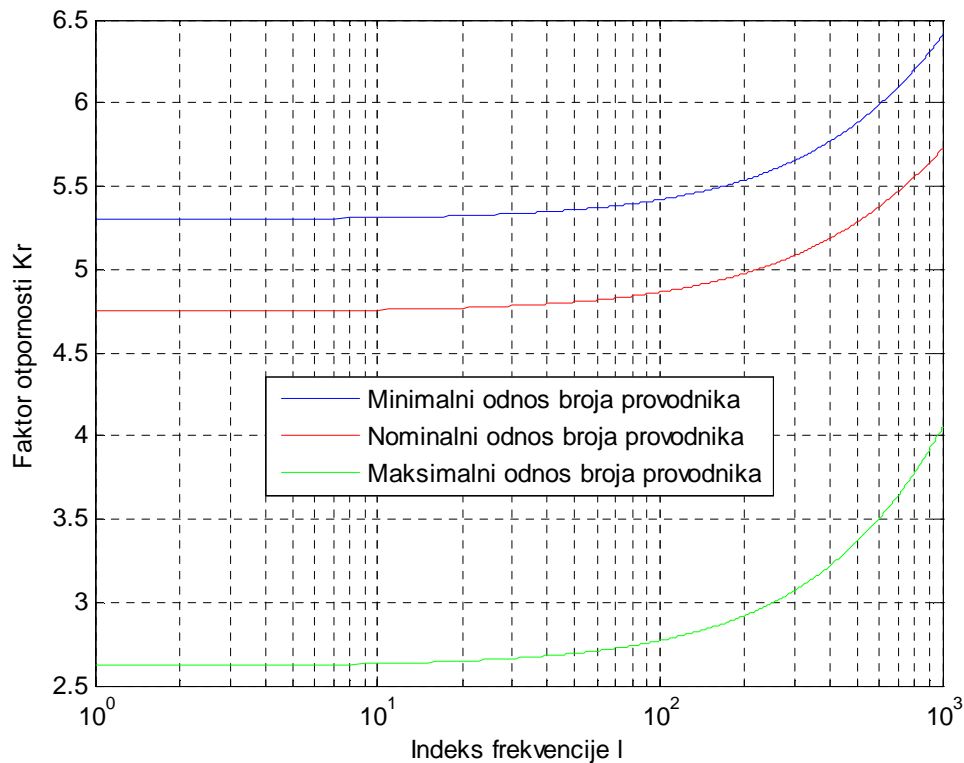
коефицијенти интерполационог полинома који даје функционалну зависност фактора отпорности од односа броја проводника за дату фреквенцију f .

График зависности фактора отпорности K_R од односа броја проводника a , за номиналну и максималну фреквенцију је приказан на слици 4.3.1



Слика 4.3.1 – Зависност фактора отпорности K_R од односа броја проводника при номиналној и максималној фреквенцији

График зависности фактора отпорности од фреквенције за случај минималног, номиналног и максималног односа броја проводника приказан је на слици 4.3.2. Апсциса је представљена индексом фреквенције, у логаритамској размери, ради бољег уочавања зависности фактора отпорности од фреквенције. Зависност фреквенције од индекса фреквенције дефинисан је релацијом (5.2.1)



Слика 4.3.2 – Зависност фактора отпорности K_R од фреквенције за случај минималног, номиналног и максималног односа броја проводника

Позивајући се на једнакост (4.1.35) за дату фреквенцију f и однос броја проводника a може се написати следећа релација:

$$K_R = \frac{R_{AC}(f, a)}{R_{DC}} \quad (4.3.6)$$

За номиналну фреквенцију и номинални однос број проводника, тј. $f=f_{nom}$ и $a=a_{nom}=1$ има се базна вредност фактора отпорности:

$$K_{RB} = \frac{R_{AC}(f = f_{nom}, a = a_{nom})}{R_{DC}} \quad (4.3.7)$$

Вредност отпора намотаја статора при номиналној фреквенцији струје и номиналном односу броја проводника, тј. $a = a_{nom} = 1$ назива се номинална отпорност статорског намотаја, тако да можемо написати :

$$R_{Snom} = R_{AC}(f = f_{nom}, a = a_{nom}) \quad (4.3.8)$$

Релативна, односно нормализована вредност фактора отпорности се одређује као количник релација (4.3.6) и (4.3.7), тако да се има:

$$K_{RX} = \frac{R_{AC}(f, a)}{R_{AC}(f = f_{nom}, a = a_{nom})} \quad (4.3.9)$$

Са друге стране фактор отпорности који је одређен у функцији *faktorKr.m*, а потом у функцији *otpornorm.m* преводи у функционалну зависност од односа броја проводника, нормализује се на следећи начин:

$$K_{RX} = \frac{K_R}{K_{RB}} \quad (4.3.10)$$

Фактор отпорности је функција две променљиве, фреквенције и односа броја проводника. Сматрамо да природа промене фактора отпорности са бројем проводника не бива значајније промењена изменом фреквенције. Такође, сматрамо да природа промене фактора отпорности са фреквенцијом не бива значајније промењена изменом броја проводника. На основу ових апроксимација ту функцију можемо аналитички представити као производ две функције при чему је прва функција независна по фреквенцији а друга функција по односу броја проводника:

$$K_R = g(f, a) = g_1 \cdot g_2 \quad (4.3.11)$$

при чему је:

$$g_1 = g(f = const, a) \quad (4.3.12)$$

$$g_2 = g(f, a = const) \quad (4.3.13)$$

Базна вредност којом се нормализује функција g_1 је:

$$K_{RB} = K_R(f, a = a_{nom}) \quad (4.3.14)$$

док је базна вредност којом се нормализује функција g_2 :

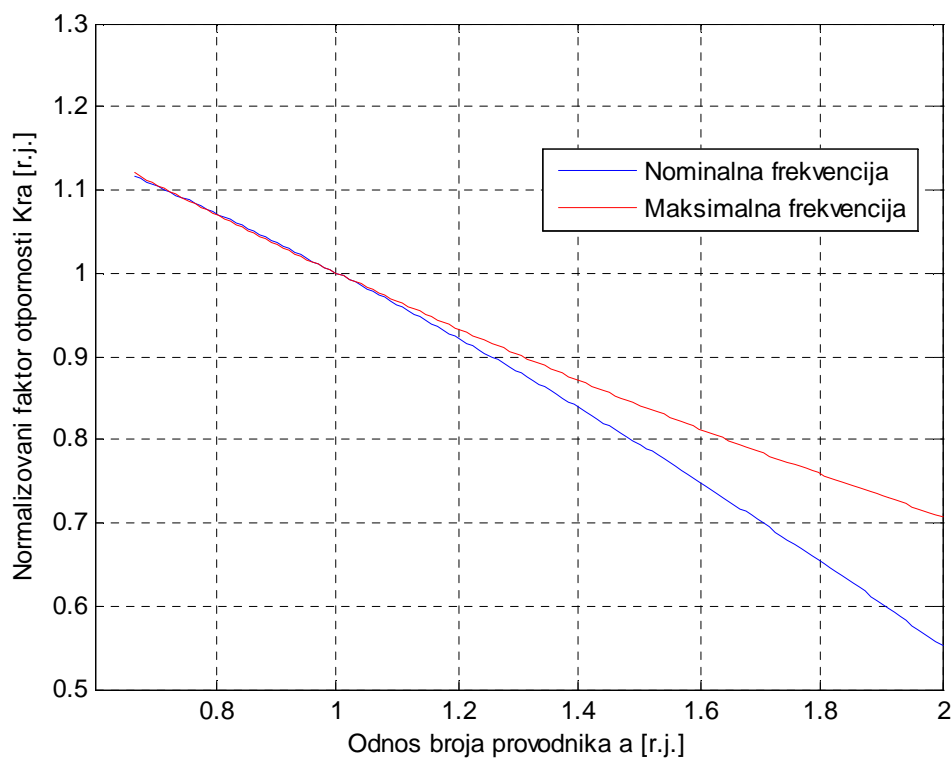
$$K_{RB} = K_R(f = f_{nom}, a) \quad (4.3.15)$$

На основу тога можемо написати нормализовани облик функција:

$$K_{Ra} = \frac{K_R(f, a)}{K_R(f, a = a_{nom})} \quad (4.3.16)$$

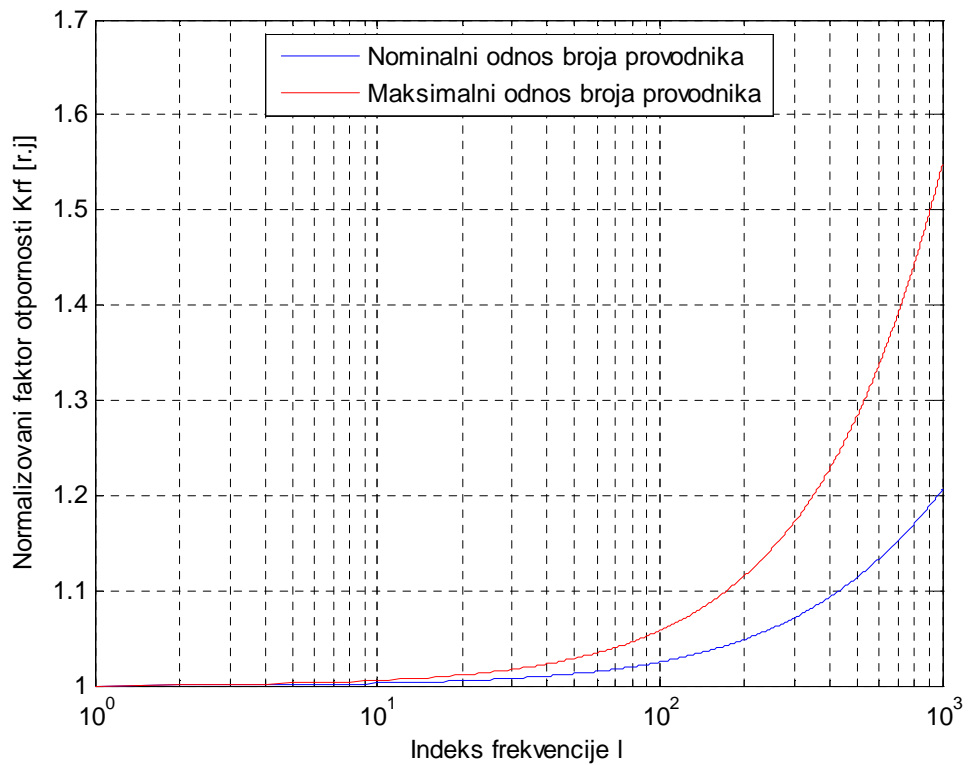
$$K_{Rf} = \frac{K_R(f, a)}{K_R(f = f_{nom}, a)} \quad (4.3.17)$$

График зависности нормализоване вредности фактора отпорности K_{Ra} од односа броја проводника за случај номиналне и максималне фреквенције је дат на слици 4.3.3.



Слика 4.3.3 – Зависност нормализованог фактора отпорности K_{Ra} од односа броја проводника при номиналној и максималној фреквенцији

График зависности нормализоване вредности фактора отпорности K_{Rf} од фреквенције за номинални и максимални односа броја проводника приказан је на слици 4.3.4. Апсциса је представљена индексом фреквенције, у логаритамској размери, ради бољег уочавања зависности фактора отпорности K_{Rf} од фреквенције. Зависност фреквенције од индекса фреквенције дефинисан је релацијом (5.2.1).



Слика 4.3.4 – Зависност нормализованог фактора отпорности K_{Rf} од фреквенције за номинални и максимални односа броја проводника

На основу релација (4.3.16) и (4.3.17) се може написати нормализовани облик фактора отпорности $K_{RX}(f, a)$ за дати режим рада као:

$$K_{RX} = K_{Ra} \cdot K_{Rf} \quad (4.3.18)$$

4.4 Утицај промене броја проводника у жлебу на статорску отпорност, индуктивност и флукс статорског намотаја који потиче од перманентног магнета

Посматрајмо жлеб са номиналним бројем проводника N_{nom} . Номинална отпорност сваког појединачног проводника је R_{nom} , а индуктивност L_{nom} . Претпоставимо да се променио број проводника у жлебу a пута у односу на номинални број проводника, тј.:

$$a = \frac{N}{N_{nom}}. \quad (4.4.1)$$

Увећање броја проводника у жлебу a пута, доводи до тога да се попречни пресек сваког појединачног проводника мора смањити a пута а дужина повећати a пута, како би остала непромењена количина бакра у жлебу, тј. :

$$S = \frac{S_{nom}}{a} \quad (4.4.2)$$

$$l = a \cdot l_{nom} \quad (4.4.3)$$

Номинална отпорност једног проводника у жлебу је: $R_{nom} = \rho \cdot \frac{l_{nom}}{S_{nom}}$, где је ρ специфична отпорност. Користећи једнакости (4.4.2) и (4.4.3) израз за номиналну отпорност проводника добија облик:

$$R_{nom} = \rho \cdot \frac{l_{nom}}{S_{nom}} = \rho \cdot \frac{\frac{l}{a}}{a \cdot S} = \rho \cdot \frac{l}{S} \cdot \frac{1}{a^2} \quad (4.4.4)$$

$$\text{Како је: } R = \rho \cdot \frac{l}{S}, \text{ следи да је: } R = R_{nom} \cdot a^2. \quad (4.4.5)$$

Из ове анализе се може закључити да је природа промене отпорности статорског намотаја пропорционална квадрату односа измењеног и номиналног броја проводника.

Магнетско коло усмерава линије магнетског спрежног поља. Отпорност магнетског кола дужине l и попречног пресека S који се не мења дуж кола, једнака

је: $R_\mu = \frac{l}{\mu_0 \cdot S}$. Индуктивност намотаја који је формиран око посматраног

магнетског кола и који има номинални број завојака N_{nom} , једнака је: $L_{nom} = \frac{N_{nom}^2}{R_\mu}$.

Претпоставимо да се променио број проводника у жлебу a пута у односу на номинални број проводника. Уврштавањем једнакости (4.4.1) у израз за номиналну индуктивност добија се:

$$L_{nom} = \frac{\left(\frac{N}{a}\right)^2}{R_\mu} = \frac{N^2}{R_\mu} \cdot \frac{1}{a^2}. \quad (4.4.6)$$

Како је: $L = \frac{N^2}{R_\mu}$, следи да је: $L = L_{nom} \cdot a^2$. (4.4.7)

Из ове анализе се може закључити да је природа промене индуктивности статорског намотаја пропорционална квадрату односа измењеног и номиналног броја проводника.

Флукс Ψ_{Rm} представља део побудног флуksа створеног перманентним магнетима, који обухвата статорске намотаје. У случају номиналног броја проводника N_{nom} има се номинална вредност тог флуksа Ψ_{Rmnom} .

Претпоставимо да се променио број проводника у жлебу a пута у односу на номинални број проводника. Нова вредност флуksа се одређује из пропорције:

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_{Rmnom} \sim N_{nom} \\ \Psi_{Rm} \sim N \end{array} \right\} \Rightarrow \Psi_{Rm} = \Psi_{Rmnom} \cdot \frac{N}{N_{nom}} \quad (4.4.8)$$

одакле следи да је: $\Psi_{Rm} = \Psi_{Rmnom} \cdot a$ (4.4.9)

Из ове анализе се може закључити да је природа промене флуksног обухвата статора који потиче од перманентних магнета на ротору пропорционална односу измењеног и номиналног броја проводника.

4.5 Функција *otpornorm.m*

Функција *otpornorm.m* у програмском пакету *Matlab* имплементира нормализацију фактора отпорности K_R и на основу те нормализације као и релације (4.4.5) одређује отпорност статорског намотаја за дати режим рада.

Улазни аргумент ове функције су индекс граничне фреквенције, f_{gr} , индекс граничног односа броја проводника, a_{gr} , матрица фактора отпорности K_R која је одређена у функцији *faktorKr.m* и број проводника у жлебу N .

Интерполација, тј. одређивање функционалне зависности фактора отпорности K_R од броја проводника N се врши помоћу функције *polyfit*. Синтакса ове функције има следећи облик:

$$P = POLYFIT(X,Y,M) \quad (4.5.1)$$

Као резултат ове функције добија се вектор врста P која садржи $M+1$ интерполационих коефицијената полинома $P(X)$ који је M -тог степена:

$$P(X) = P(1) \cdot X^M + P(2) \cdot X^{M-1} + \dots + P(M) \cdot X + P(M+1) \quad (4.5.2)$$

У нашем случају Y је вектор врста која садржи елементе матрице фактора отпорности K_R за дату фреквенцију, и тих елемената има колико је проводника у жлебу, тј. N елемената. X је вектор врста чији елементи представљају могућност целобројног броја проводника у жлебу: $1, 2, \dots, N$.

За степен интерполационог полинома у нашем случају узимамо $M=2$, тј. интерполациони полином ће бити параболична функција:

$$P(X) = P(1) \cdot X^2 + P(2) \cdot X + P(3) \quad (4.5.3)$$

Након што се одреде коефицијенти интерполационог полинома (4.3.2) помоћу функције (4.5.1), следи одређивање коефицијената интерполационог полинома (4.3.4) користећи једнакости из (4.3.5) који дају функционалну зависност фактора отпорности од односа броја проводника за дату фреквенцију f .

Следећи корак је одређивање вредности фактора отпорности K_R за било коју вредност односа броја проводника a . То се имплементира помоћу функције *polyval*. Синтакса ове функције има следећи облик:

$$Y = POLYVAL(P, X) \quad (4.5.4)$$

Као резултат ове функције добија се вредност полинома која је израчуната за променљиву X . P је вектор врста која садржи $M+1$ коефицијената:

$$Y = P(1) \cdot X^M + P(2) \cdot X^{M-1} + \dots + P(M) \cdot X + P(M+1) \quad (4.5.5)$$

У нашем случају P је вектор врста која садржи коефицијенте интерполационог полинома који дају функционалну зависност фактора отпорности од односа броја проводника за дату учестаност f , тј. коефицијенте из релације (4.3.5). X је вектор врста чији елементи представљају однос броја проводника за цели опсег који је дефинисан релацијом (5.2.2).

Дакле, имамо:

$$Y = P(1) \cdot X^2 + P(2) \cdot X + P(3) \quad (4.5.6)$$

Након одређивања матрице фактора отпорности K_R за дати режим рада који је дефинисан односом броја проводника и фреквенцијом, прелази се на одређивање нормализованих вредности фактора K_{Ra} и K_{Rf} .

Сви елементи једне врсте матрице K_R за дату фреквенцију се деле са елементом те врсте који одговара номиналаном односу броја проводника, тј. базном вредношћу која је дефинисана релацијом (4.3.14). На овај начин се одређују нормализоване вредности фактора отпорности K_{Ra} .

Сви елементи једне колоне матрице K_R за дати однос броја проводника се деле са елементом те врсте који одговара номиналној фреквенцији, тј. базном вредношћу која је дефинисана релацијом (4.3.15). На овај начин се одређују нормализоване вредности фактора отпорности K_{Rf} .

Водећи рачуна о релацијама (4.3.8), (4.3.9) и (4.4.5) израз за отпорност статорског намотаја се може написати у функцији од фреквенције и односа броја проводника као:

$$R_S(f, a) = R_S(f = f_{nom}, a = a_{nom}) \cdot a^2 \cdot K_{RX}$$

односно

$$R_S(f, a) = R_{Snom} \cdot a^2 \cdot K_{RX} \quad (4.5.7)$$

при чему је K_{RX} дефинисано релацијом (4.3.18).

У функцији $otpornorm.m$ фигуришу следећи параметри:

- Максимална брзина обртања ротора: $n_{max} = 38000 \frac{ob}{min}$
- Номинална брзина обртања ротора: $n_{nom} = 26000 \frac{ob}{min}$
- Номинална отпорност статорског намотаја: $R_{Snom} = 0.025r.j.$
- Број проводника у жлебу: $N = 3$
- Номинални број проводника у жлебу: $N_{nom} = 1.5$
- Степен интерполационог полинома: $M=2$

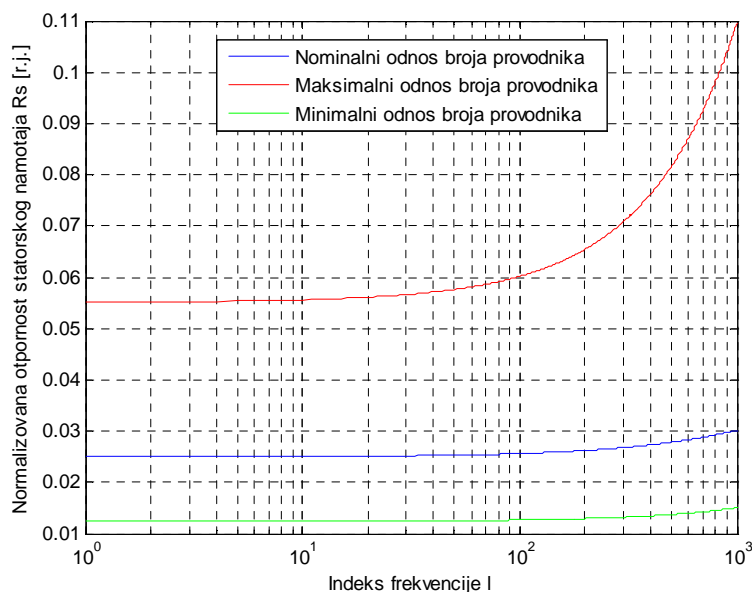
4.6 Снага губитака статорског намотаја за дати режим рада

За дати режим рада који је одређен фреквенцијом f и односом броја проводника a , снага Џулових губитака се одређује као производ отпорности статорског намотаја за дати режим рада и квадрата интензитета статорске струје :

$$p_{Cu}(f, a) = R_s(f, a) \cdot i_s^2(f, a) \quad (4.6.1)$$

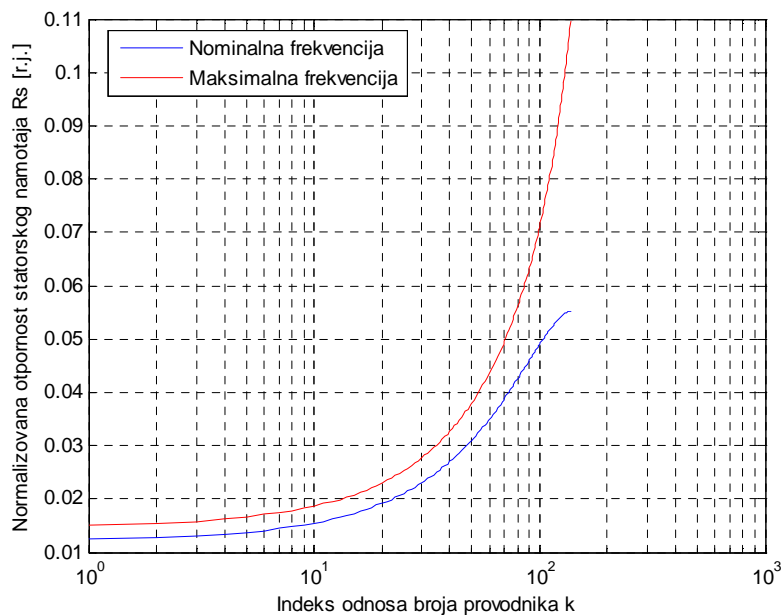
Отпорност статорског намотаја за дати режим рада одређује се у функцији $отпорност.m$.

График зависности нормализоване вредности статорске отпорности од фреквенције, за номинални, максимални и минимални однос броја проводника је приказан на слици 4.6.1. Апсциса је представљена индексом фреквенције, у логаритамској размери, ради бољег уочавања зависности нормализоване вредности статорске отпорности од фреквенције. Зависност фреквенције од индекса фреквенције дефинисан је релацијом (5.2.1).



Слика 4.6.1 – Зависност нормализоване отпорности статорског намотаја R_s од фреквенције за случај номиналног, максималног и минималног односа броја проводника

График зависности нормализоване вредности статорске отпорности од односа броја проводника за случај номиналне и максималне фреквенције приказан је на слици 4.6.2. Апсциса је представљена индексом односа броја проводника, у логаритамској размери, ради бољег уочавања зависности нормализоване вредности статорске отпорности од односа броја проводника. Зависност односа броја проводника од индекса односа броја проводника дефинисана је релацијом (5.2.2).

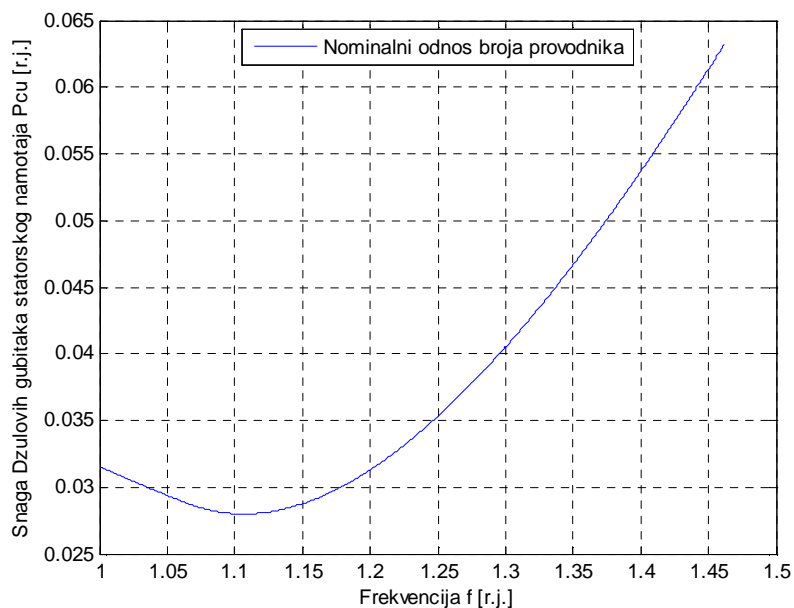


Слика 4.6.2 – Зависност нормализоване отпорности статорског намотаја R_s од односа броја проводника за случај номиналне и максималне фреквенције

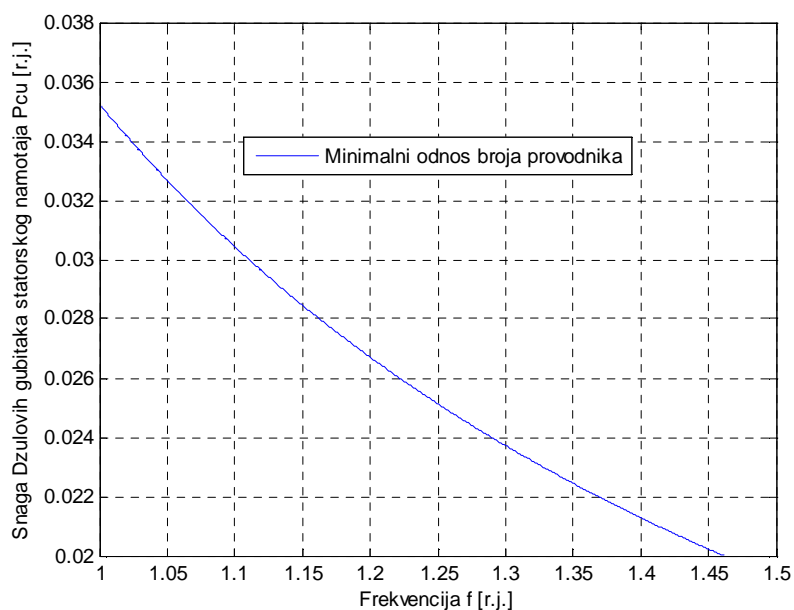
Статорска струја се састоји q и d компоненте струје. Q компонента статорске струје се одређује из релације (5.1.1). D компонента статорске струје, тј. струја демагнетизације има вредност 0 ако је испуњен услов (5.1.3). У случају да тај услов није испуњен вредност d компоненте струје се одређује из услова (5.1.4).

Можемо уочити да q компоненте струје не зависи од вредности статорске отпорности. Из услова напонске равнотеже (5.1.4) у коме фигурише статорска отпорност, јасно се уочава утицај статорске отпорности на интезитет d компоненте струје.

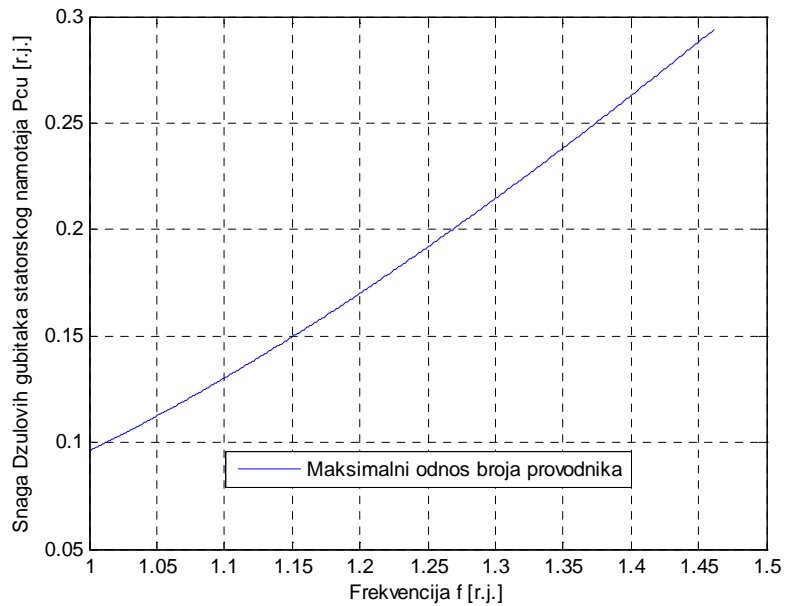
График зависности снаге ζ улових губитака отпорности статорског намотаја од фреквенције за номинални однос броја проводника је дат на слици 4.6.3. За случај минималног и максималног односа броја проводника зависност је приказана на сликама 4.6.4 и 4.6.5.



Слика 4.6.3 – Зависност снаге Цуллових губитака статорског намотаја од фреквенције за случај номиналног односа броја проводника



Слика 4.6.4 – Зависност снаге Цуллових губитака статорског намотаја од фреквенције за случај минималног односа броја проводника



Слика 4.6.5 – Зависност снаге Цулових губитака статорског намотаја од фреквенције за случај максималног односа броја проводника

Можемо уочити да се повећањем броја проводника и уласком у режим демагнетизације увећава снага Цулових губитака у намотају статора, због увећања ефективне вредности струје статора i_s .

5. Рад синхроне машине са перманентним магнетима на ротору у области слабљења поља

5.1 Израчунавање струје демагнетизације у области слабљења поља за дати режим рада

Да би се остварио рад у зони слабљења поља, у којој се остварује константна снага, док брзина обртања вратила варира, неопходно је инјектирање демагнетизационе струје како би се умањила амплитуда статорског флукса и постигла индукована електромоторна сила унутар границе номиналног напона.

За дати режим рада, релативизована вредност q компоненте статорске струје се рачуна из релације (3.1.6) као:

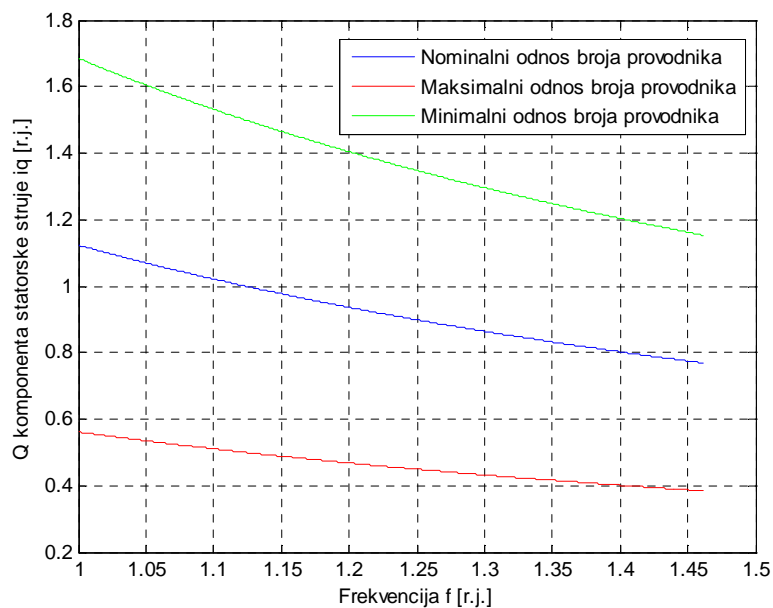
$$i_q = \frac{P_{nom}}{f \cdot \psi_{Rm}} \quad (5.1.1)$$

уз услов да је снага константна и једнака номиналној вредности у области слабљења поља.

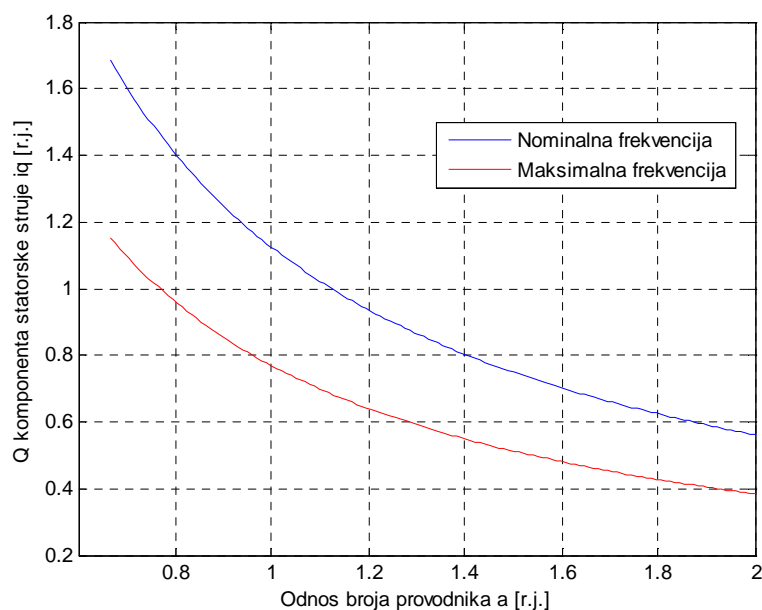
График зависности q компоненте статорске струје од фреквенције за случај номиналног, максималног и минималног односа броја проводника је приказан на слици 5.1.1.

Смањењем броја проводника увећава се q компонента статорске струје, а самим тим и потребна ефективна вредност струје статора за остварење жељене снаге.

График зависности q компоненте статорске струје од односа броја проводника за случај номиналне и максималне фреквенције приказан је на слици 5.1.2.



Слика 5. 1.1 – Зависност q компоненте статорске струје од фреквенције за случај номиналног, максималног и минималног односа броја проводника



Слика 5. 1.2 – Зависност q компоненте статорске струје од односа броја проводника за случај номиналне и максималне фреквенције

D компонента статорске струје има вредност нула ако је за дати режим рада испуњен услов да индукована електромоторна сила при било којој брзини има вредност мању од номиналног напона, тј. :

$$u_d^2 + u_q^2 < u_{nom}^2, \quad (5.1.2)$$

при чему је $u_{nom} = 1r \cdot j$.

Користећи релативизоване облике релација (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) и (3.1.4) добија се услов:

$$\left(f \cdot L_s \cdot i_q\right)^2 + \left(R_s \cdot i_q + f \cdot \psi_{Rm}\right)^2 < 1 \quad (5.1.3)$$

Ако овај услов није испуњен, рад у режимима са брзинама већим од номиналне није могућ уз $i_d = 0$. Рад при брзинама већим од номиналне захтева слабљење поља.

Имамо следећу неједнакост:

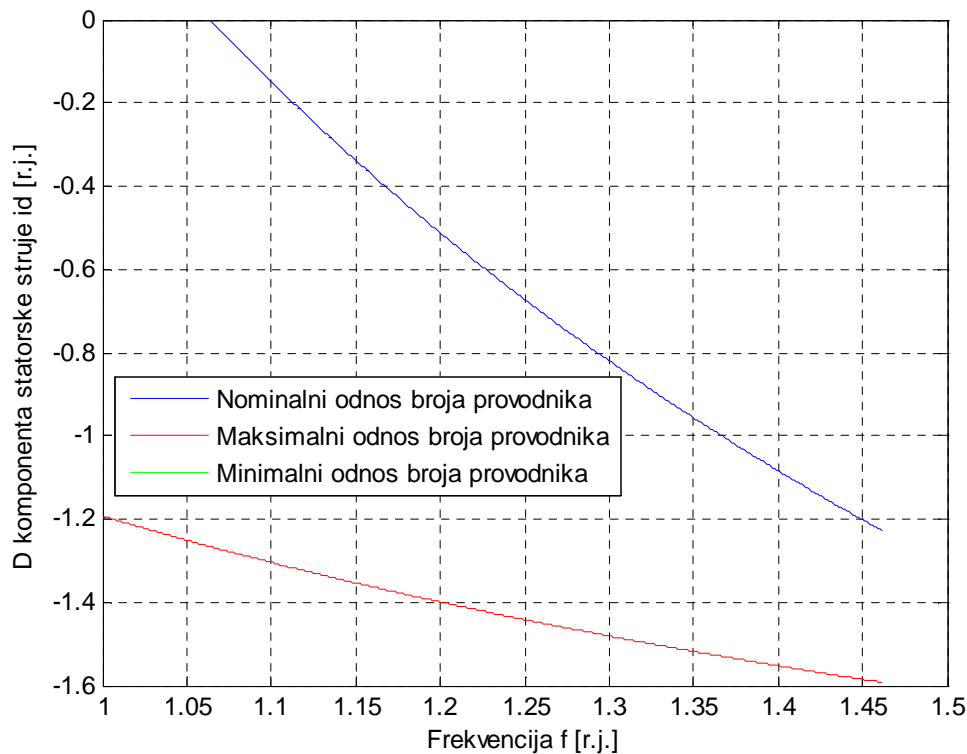
$$\left(R_s \cdot i_d - f \cdot L_s \cdot i_q\right)^2 + \left(R_s \cdot i_q + f \cdot L_s \cdot i_d + f \cdot \psi_{Rm}\right)^2 < 1 \quad (5.1.4)$$

Након сређивања имамо:

$$\left(R_s^2 + f^2 \cdot L_s^2\right) \cdot i_d^2 + \left(2 \cdot f^2 \cdot L_s \cdot \psi_{Rm}\right) \cdot i_d + \left(f \cdot L_s \cdot i_q\right)^2 + \left(R_s \cdot i_q + f \cdot \psi_{Rm}\right)^2 < 1 \quad (5.1.5)$$

Као решење ове квадратне једначине узима се по апсолутној вредности мања вредност d компоненте статорске струје.

График зависности d компоненте статорске струје од фреквенције за случај номиналног, максималног и минималног односа броја проводника је приказан на слици 5.1.3.



Слика 5.1.3 – Зависност d компоненте статорске струје од фреквенције за случај номиналног, максималног и минималног односа броја проводника

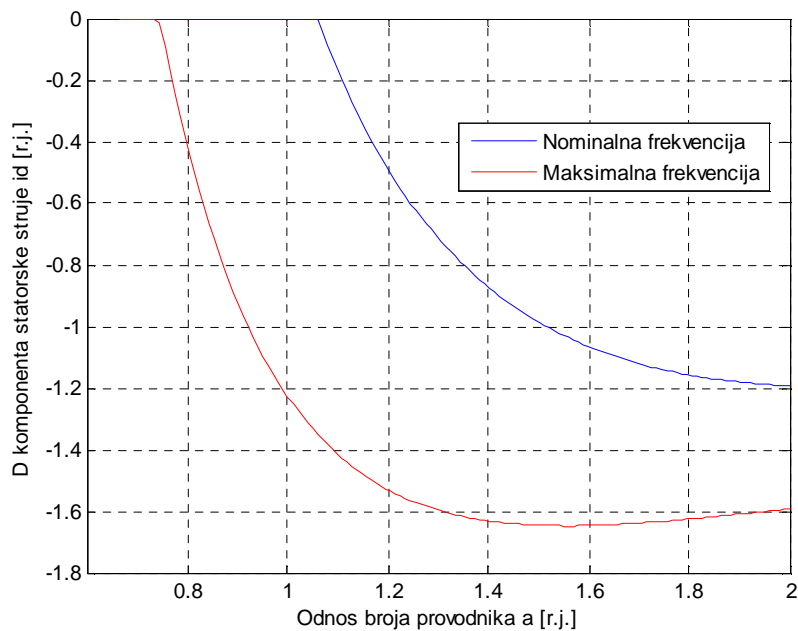
Повећањем броја проводника увећава се d компонента статорске струје како електромоторна сила, која је пропорционална броју проводника, и при највећој траженој брзини не би премашила границе номиналног напона.

График зависности d компоненте статорске струје од односа броја проводника за случај номиналне и максималне фреквенције приказан је на слици 5.1.4.

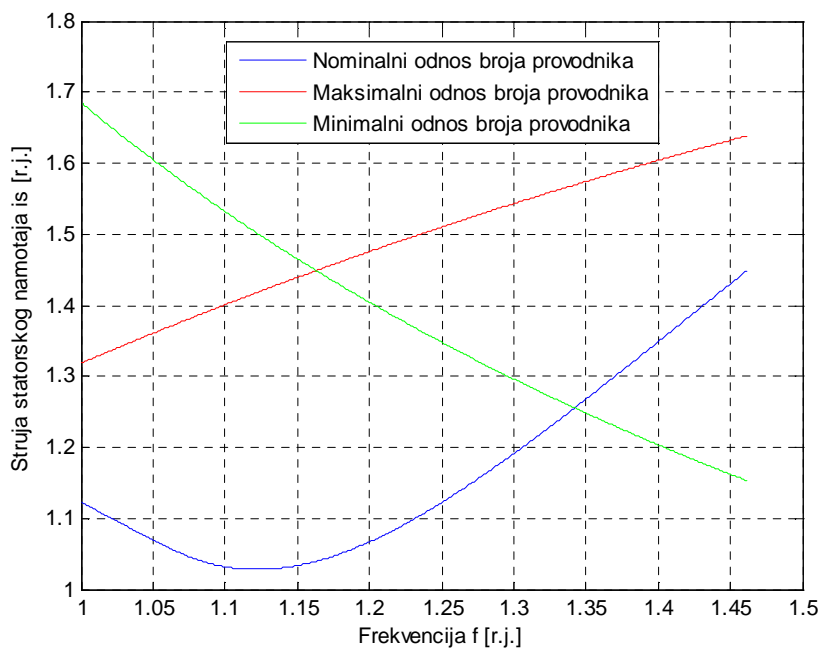
За дати режим рада струја статорског намотаја се рачуна као:

$$i_s = \sqrt{i_q^2 + i_d^2} \quad (5.1.6)$$

График зависности струје статорског намотаја од фреквенције за случај номиналног, максималног и минималног односа броја проводника је приказан на слици 5.1.5.



Слика 5.1.4 – Зависност d компоненте статорске струје од односа броја проводника за случај номиналне и максималне фреквенције



Слика 5.1.5 – Зависност струје статорског намотаја од фреквенције за случај номиналног, максималног и минималног односа броја проводника

5.2 Функција *struje.m*

Улазни аргумент ове функције су индекс граничне фреквенције, f_{gr} , индекс граничног односа броја проводника, a_{gr} , и матрица отпорности R_s .

Индекс фреквенције l се мења од 1 до f_{gr} са кораком 1. Фреквенција f се мења према релацији:

$$f(l) = 1 + \frac{n_{max} - n_{nom}}{n_{nom}} \cdot \frac{l-1}{f_{gr} - 1} \quad (5.2.1)$$

При чему је n_{max} максимална брзина обртања мотора а n_{nom} номинална брзина обртања у об/мин. За индекс $l=1$ добија се номинална фреквенција и она одговара номиналној брзини обртања. За индекс $l=f_{gr}$ добија се максимална фреквенција и она одговара максималној брзини обртања.

Индекс односа броја проводника k се мења од 1 до a_{gr} са кораком 1. Однос броја проводника a се мења према релацији:

$$a(k) = \frac{2}{3} + \frac{k-1}{102} \quad (5.2.2)$$

За индекс $k=35$ добија се $a=1$ што значи да овај индекс представља номинални број проводника. За индекс $k=a_{gr}$ добија се $a=2$ и то представља случај повећања броја проводника 2 пута.

Индуктивност статорског намотаја и флуksни обухват намотаја статора који потиче од перманентног магнета су функција односа броја проводника и налазе се у унутрашња петљи, тј. петљи по односу броја проводника a . Њихова функционална зависност је одређена релацијама (4.4.7) и (4.4.9) као:

$$L_s = L_{snom} \cdot a^2 \quad (5.2.3)$$

$$\psi_{Rm} = \psi_{Rmnom} \cdot a \quad (5.2.4)$$

За фреквенцију из спољашње петље, у унутрашњој петљи за радни режим који је дефинисан односом броја проводника одређује се q компонента статорске струје на основу релације (5.1.1). Из дате формуле се може закључити да је q

компонента статорске струје функција две променљиве, фреквенције и односа броја проводника.

На основу статорске отпорности као улазног аргумента, q компоненте статорске струје, индуктивности статорског намотаја и флуksног обухвата намотаја статора који потиче од перманентног магнета, испитује се услов (5.1.3), тј. да ли је за дати режим рада потребно ињектирање демагнетизационе струје i_d .

У случају да је услов испуњен, прелази се на следећу фреквенцију из спољашње петље.

У случају да услов није испуњен прелази се на одређивање d компоненте статорске струје из услова (5.1.5). Пошто квадратна једначина има два решења, за нас је од интереса решење које је по апсолутној вредности мање.

У функцији *struje.m* фигуришу следећи параметри:

- Максимална брзина обртања ротора: $n_{\max} = 38000 \frac{ob}{min}$
- Номинална брзина обртања ротора: $n_{nom} = 26000 \frac{ob}{min}$
- Номинална вредност индуктивности статорског намотаја:
 $L_{snom} = 0.2r.j.$
- Номиналан вредност флуksног обухвата статора који потиче од перманентних магнета на ротору: $\psi_{Rmnom} = 0.89r.j.$
- Номинална снага: $p_{nom} = 1r.j.$

6. Моделовање снаге губитака у гвожђу синхроне машине са перманентним магнетима на ротору

6.1 Одређивање компоненти и резултантне магнетске индукције у зазору синхроне машине са перманентним магнетима на ротору

Резултантна магнетска индукција у ваздушном зазору синхроне машине са перманентним магнетима на ротору је резултат интеракције:

- 1) Магнетске индукције која потиче од перманентних магнета на ротору
- 2) Магнетске индукције која потиче од q компоненте статорске струје
- 3) Магнетске индукције која потиче од d компоненте статорске струје

Магнетска индукција која потиче од перманентних магнета на ротору има интензитет B_{Rm} који се не може мењати, док се таласни облик мења у зависности од положаја ротора θ_m .

Магнетска индукција која потиче од q компоненте статорске струје има интензитет B_q чија се вредност мења у зависности од радног режима у коме се машина налази при чему таласни облик фазно предњачи у односу на таласни облик магнетске индукције која потиче од перманентних магнета на ротору за $\frac{\pi}{2}$.
Интезитет укупног флуksног обухвата намотаја који потиче од q компоненте статорске струје у номиналном режиму рада је:

$$\Psi_{qnom} = L_{Snom} \cdot I_{qnom} \quad (6.1.1)$$

односно

$$\Psi_{qnom} = N_{nom} \cdot \Phi_{qnom} = N_{nom} \cdot B_{qnom} \cdot S, \quad (6.1.2)$$

где је Φ_{qnom} номинална вредност флуksа једног навојка, а B_{qnom} номинална вредност индукције која потиче од q компоненте статорске струје.

Претпоставимо да се променио број проводника a пута у односу на номинални број проводника, тј. $N = a \cdot N_{nom}$. Нова вредност укупног флуksног обухвата је:

$$\Psi_q = N \cdot \Phi_q = a \cdot N_{nom} \cdot B_q \cdot S \quad (6.1.3)$$

Из једнакости (6.1.3) одређујемо магнетску индукцију као:

$$B_q = \frac{\Psi_q}{a \cdot N_{nom} \cdot S} \quad (6.1.4)$$

Множењем бројиоца и имениоца једнакости (6.1.4) са B_{qnom} добијамо једнакост:

$$B_q = \frac{\Psi_q}{a \cdot N_{nom} \cdot S} \cdot \frac{B_{qnom}}{B_{qnom}} = \frac{\Psi_q}{\Psi_{qnom}} \cdot \frac{1}{a} \cdot B_{qnom} \quad (6.1.5)$$

односно

$$\frac{B_q}{B_{qnom}} = \frac{\Psi_q}{\Psi_{qnom}} \cdot \frac{1}{a} \quad (6.1.6)$$

У нормализованој форми:

$$B_q = \frac{\Psi_q}{a}, \quad (6.1.7)$$

при чему је $\Psi_q = L_s \cdot i_q$.

Магнетска индукција која потиче од d компоненте статорске струје има интезитет B_d чија се вредност мења у зависности од радног режима у коме се машина налази и у фази је са таласним обликом магнетске индукције која потиче од перманентних магнета на ротору. Интезитет укупног флуksног обухвата намотаја који потиче од d компоненте статорске струје у номиналном режиму рада је:

$$\Psi_{dnom} = L_{Snom} \cdot I_{dnom} \quad (6.1.8)$$

односно

$$\Psi_{dnom} = N_{nom} \cdot \Phi_{dnom} = N_{nom} \cdot B_{dnom} \cdot S, \quad (6.1.9)$$

где је Φ_{dnom} номинална вредност флуksа једног навојка, а B_{dnom} номинална вредност индукције која потиче од d компоненте статорске струје.

Претпоставимо да се променио број проводника a пута у односу на номинални број проводника, тј. $N = a \cdot N_{nom}$. Нова вредност укупног флуksног обухвата је:

$$\Psi_d = N \cdot \Phi_d = a \cdot N_{nom} \cdot B_d \cdot S \quad (6.1.10)$$

Из једнакости (6.1.10) одређујемо магнетску индукцију као:

$$B_d = \frac{\Psi_d}{a \cdot N_{nom} \cdot S} \quad (6.1.11)$$

Множењем бројиоца и имениоца једнакости (6.1.11) са B_{dnom} добијамо једнакост:

$$B_d = \frac{\Psi_d}{a \cdot N_{nom} \cdot S} \cdot \frac{B_{dnom}}{B_{dnom}} = \frac{\Psi_d}{\Psi_{dnom}} \cdot \frac{1}{a} \cdot B_{dnom} \quad (6.1.12)$$

односно

$$\frac{B_d}{B_{dnom}} = \frac{\Psi_d}{\Psi_{dnom}} \cdot \frac{1}{a} \quad (6.1.13)$$

У нормализованој форми:

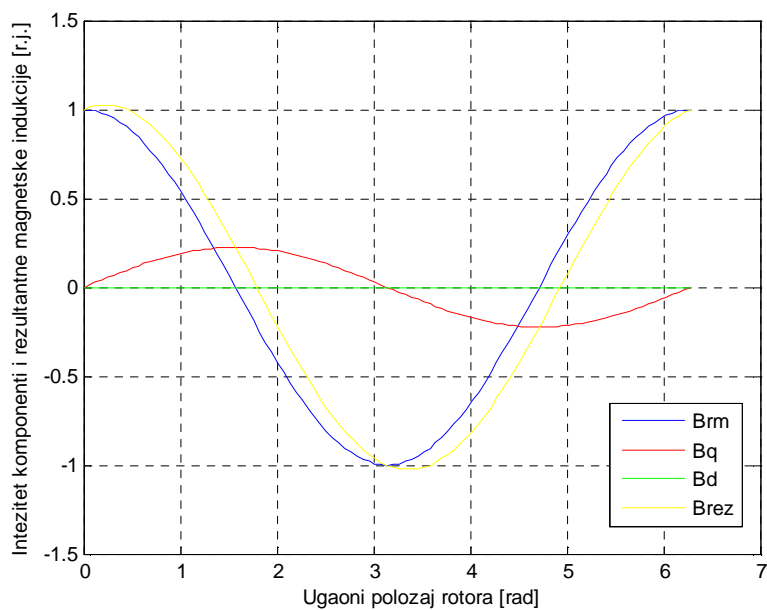
$$B_d = \frac{\Psi_d}{a} \quad (6.1.14)$$

при чему је $\Psi_d = L_s \cdot i_d$.

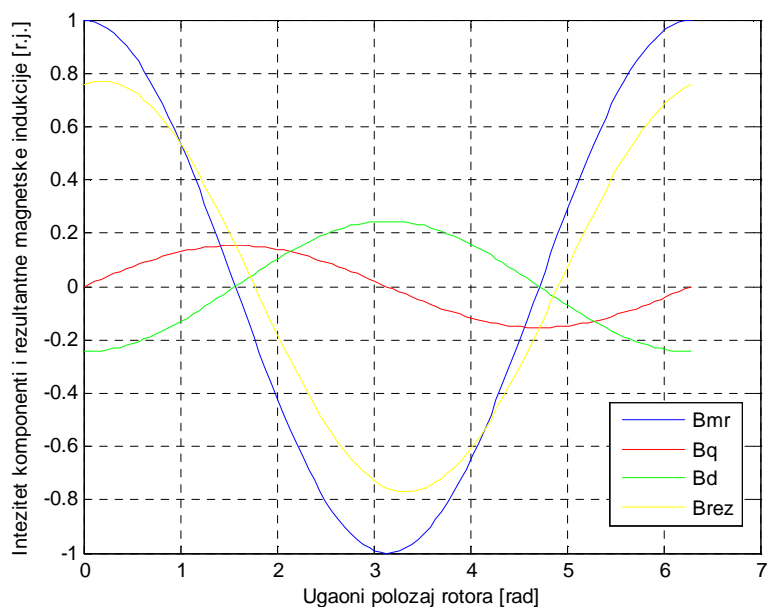
Резултантна простопериодична магнетска индукција у ваздушном зазору машине у функцији угаоног положаја ротора се одређује као збир таласних облика појединачних компоненти магнетске индукције за дати режим рада:

$$B_{rez}(\theta_m) = B_{Rm} \cdot \cos(\theta_m) + B_q \cdot \sin(\theta_m) + B_d \cdot \cos(\theta_m) \quad (6.1.15)$$

График зависности компоненти и резултантне магнетске индукције у зазору машине у зависности од угаоног положаја ротора за режим рада дефинисан номиналним односом броја проводника и номиналном фреквенцијом приказан је на слици 6.1.1. За случај максималне фреквенције зависност је приказана на слици 6.1.2.



Слика 6.1.1 – Зависност компоненти и резултантне магнетске индукције у ваздушном зазору од угаоног положаја ротора на интервалу $[0-2\pi]$ при номиналном односу броја проводника и номиналној фреквенцији



Слика 6.1.2 – Зависност компоненти и резултантне магнетске индукције у ваздушном зазору од угаоног положаја ротора на интервалу $[0-2\pi]$ при номиналном односу броја проводника и максималној фреквенцији

Компонента магнетске индукције B_d са слике 6.1.1 има интезитет нула, јер за дати режим рада вредност демагнетизационе струје је нула.

Компонента магнетске индукције B_q са слике 6.1.2 има интезитет који у великој мери смањује интезитет резултантне магнетске индукције у ваздушном зазору.

Резултантна простопериодична магнетска индукција у зазору машине ствара пулсације у феромагнетском материјалу које проузрокују губитке у гвожђу.

Сматрајући да је познат однос ширине жлеба и зупца, $\frac{W_{zleba}}{W_{zupca}}$, можемо са сигурношћу увести апроксимацију да је индукција у зупцима једнака резултантној магнетској индукцији у зазору помножена са фактором: $k' = \frac{W_{zleba} + W_{zupca}}{W_{zupca}}$. Такође, на основу ове апроксимације можемо сматрати да су губици у гвожђу машине доминантни у зупцима машине.

Пошто су губици у гвожђу услед вихорних струја пропорционални квадрату фреквенције струје они су доминантни у односу на губитке услед хистерезиса, па се може написати апроксимативно да је снага губитака у гвожђу:

$$p_{Fe} \sim k \cdot f^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(B_{Rm} \cdot \cos(\theta_m) + B_d \cdot \cos(\theta_m) + B_q \cdot \sin(\theta_m) \right)^2 d\theta_m \quad (6.1.15)$$

при чему фактор k узима у обзир фактор k' , дубину жлеба, као и геометрију жлеба и зубаца.

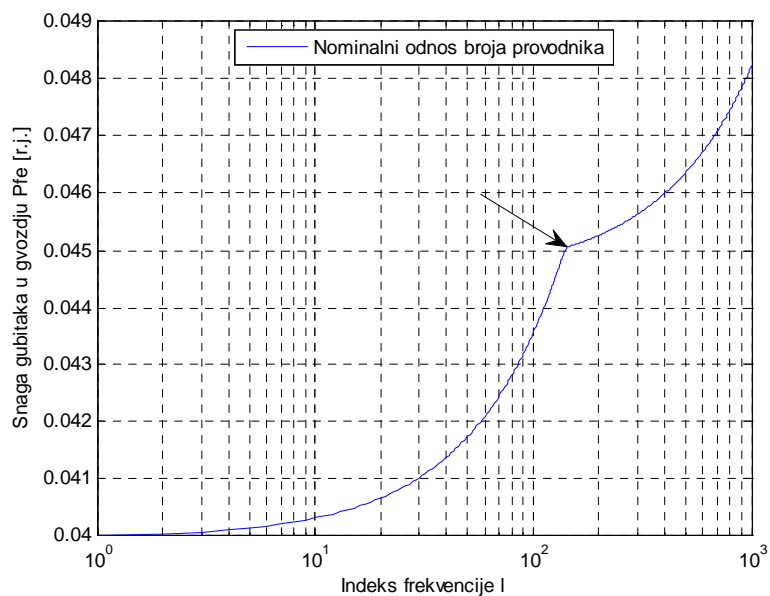
У номиналном режиму рада, који је дефинисан номиналном фреквенцијом и номиналним односом броја проводника, d компонента статорске струје има вредност нула, тако да имамо:

$$p_{Fenom} \sim k \cdot f_{nom}^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(B_{Rm} \cdot \cos(\theta_m) + B_{qnom} \cdot \sin(\theta_m) \right)^2 d\theta_m \quad (6.1.16)$$

Из релација (6.1.15) и (6.1.16) снагу губитака у гвожђу одређујемо као:

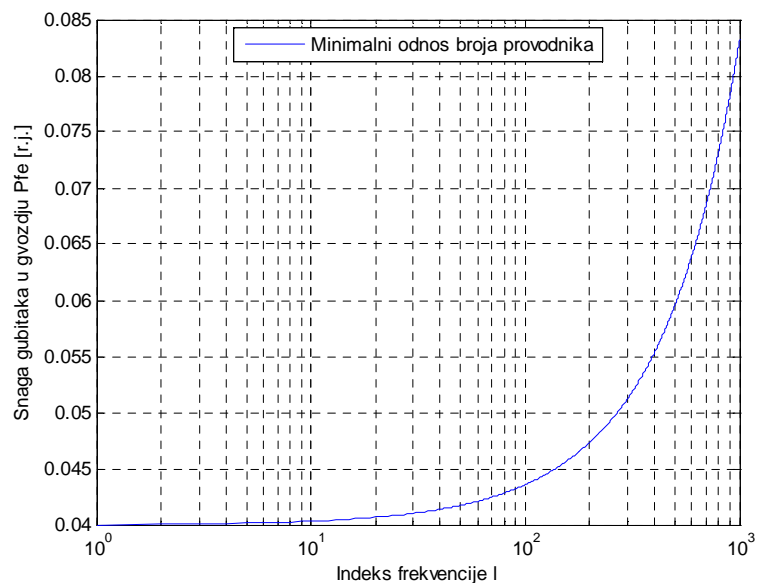
$$p_{Fe} = p_{Fenom} \cdot \frac{f^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(B_{Rm} \cdot \cos(\theta_m) + B_d \cdot \cos(\theta_m) + B_q \cdot \sin(\theta_m) \right)^2 d\theta_m}{f_{nom}^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(B_{Rm} \cdot \cos(\theta_m) + B_{qnom} \cdot \sin(\theta_m) \right)^2 d\theta_m} \quad (6.1.17)$$

График зависности снаге губитака у гвожђу од фреквенције за случај номиналног односа броја проводника приказан је на слици 6.1.3 Апсциса је представљена индексом фреквенције у логаритамској размери ради бољег уочавања зависности снаге губитака у гвожђу од фреквенције. Зависност фреквенције од индекса фреквенције дефинисан је релацијом (5.2.1). За случај минималног и максималног односа броја проводника зависност је приказана на сликама 6.1.4 и 6.1.5.

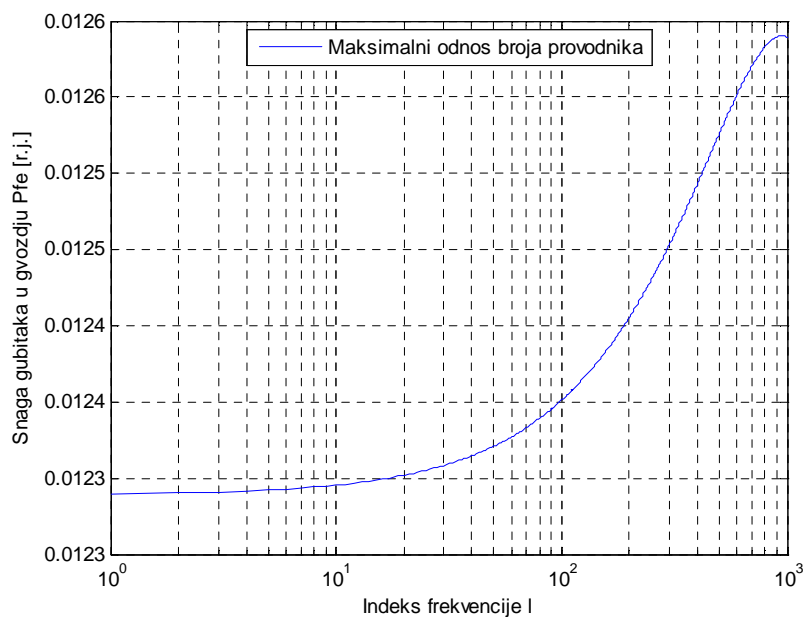


Слика 6.1.3 – Зависност снаге губитака у гвожђу од фреквенције за случај номиналног односа броја проводника

Можемо приметити да се за радни режим који је дефинисан номиналним односом броја проводника, мења нагиб карактеристике губитака у гвожђу, од оне фреквенције за коју се прелази у режим демагнетизације. Та тачка је на графику симболично означена стрелицом.



Слика 6.1.4 – Зависност снаге губитака у гвожђу од фреквенције за случај минималног односа броја проводника

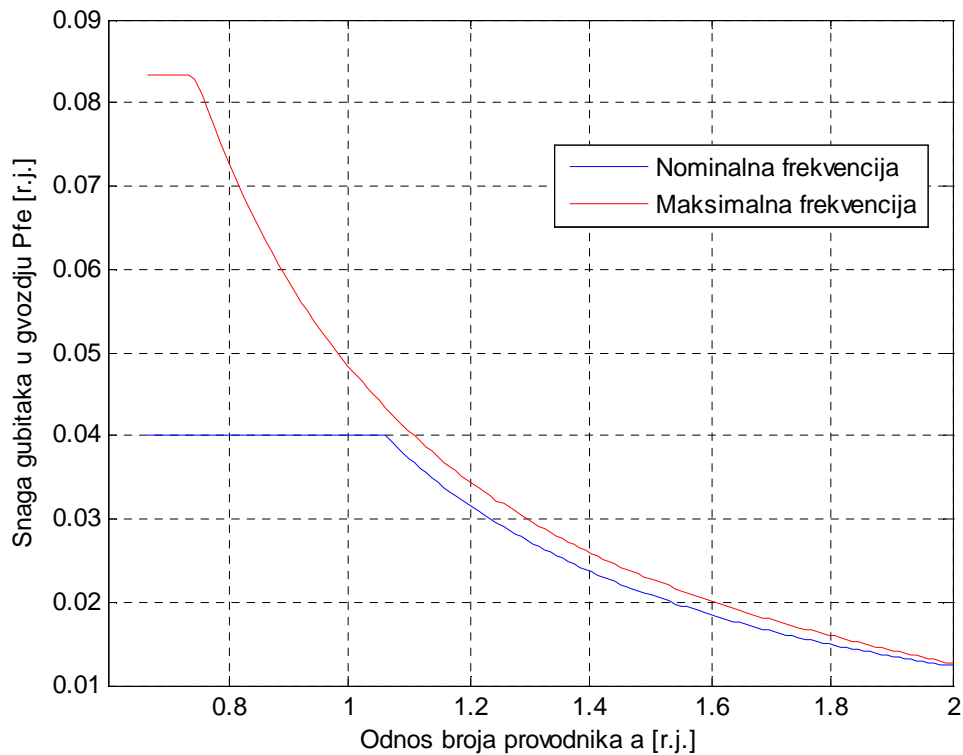


Слика 6.1.5 – Зависност снаге губитака у гвожђу од фреквенције за случај максималног односа броја проводника

У случају минималног односа броја проводника не улази се у режим демагнетизације тако да снага губитака у гвожђу достиже знатно већу вредност него за случај номиналног односа броја проводника.

У случају максималног односа броја проводника улази се у режим демагнетизације тако да снага губитака у гвожђу достиже знатно мању вредност него за случај номиналног односа броја проводника.

График зависности снаге губитака у гвожђу од односа броја проводника за случај номиналне и максималне фреквенције приказан је на слици 6.1.6.



Слика 6.1.6 – Зависност снаге губитака у гвожђу од односа броја проводника за случај номиналне и максималне фреквенције

6.2 Функција *gvozdje.m*

Функција *gvozdje.m* у програмском пакету *Matlab* имплементира одређивање снаге губитака у гвожђу статора синхроне машине са перманентним магнетима на ротору.

Улазни аргумент ове функције су индекс граничне фреквенције, f_{gr} , индекс граничног односа броја проводника, a_{gr} , матрица d компоненте статорске струје, матрица q компоненте статорске струје.

Спољашња петља је петља по фреквенцији, f , дефинисана релацијом (5.2.1) док је унутрашња петља петља по односу броја проводника, a , дефинисана релацијом (5.2.2).

За фреквенцију из спољашње петље, у унутрашњој петљи за радни режим који је дефинисан односом броја проводника, као и d и q компонентом статорске струје као улазног аргумента, одређују се интензитети компоненти магнетске индукција која потиче од q компоненте статорске струје, B_q , и d компоненте статорске струје, B_d .

После одређивања интензитета компоненти магнетске индукције за дати и номинални режим рада прелази се на одређивање резултантне магнетске индукције у ваздушном зазору на основу релације (6.1.15) за сваку од *корак* тачака интервала интеграције $[0-2\pi]$, при чему је *корак* интеграције $\frac{2 \cdot \pi}{\text{korak}}$.

Након тога, одређује се квадрат израчунатих вредности за сваку од *корак* тачака интервала интеграције $[0-2\pi]$ према релацији (6.1.15) и то су вредности подинтегралне функције у *корак* тачака. Користећи релацију за одређивање нумеричког интеграла (4.2.4), одређују се губици у гвожђу услед вихорних струја према релацији (6.1.17) за дату фреквенцију.

У функцији *gvozdje.m* фигуришу следећи параметри:

- Максимална брзина обртања ротора: $n_{\max} = 38000 \frac{ob}{\min}$
- Номинална брзина обртања ротора: $n_{\text{nom}} = 26000 \frac{ob}{\min}$
- Индекс номиналне фреквенције: $l_{\text{nom}} = 1$

- Индекс номиналног односа броја проводника: $k_{nom} = 35$
- Номинална вредност индуктивности статорског намотаја:
 $L_{snom} = 0.2r \cdot j$.
- Номинална вредност флуksног обухвата статора који потиче од перманентних магнета на ротору: $\psi_{Rmnom} = 0.89r \cdot j$.
- Магнетска индукција перманентног магнета на ротору: $B_{Rm} = 1r \cdot j$.
- Корак интеграције: $korak = 100$
- Номинална снага губитака у гвожђу: $p_{Fenom} = 0.04r \cdot j$.

7. Оптимизација снаге губитака у синхронном мотору са перманентним магнетима на ротору

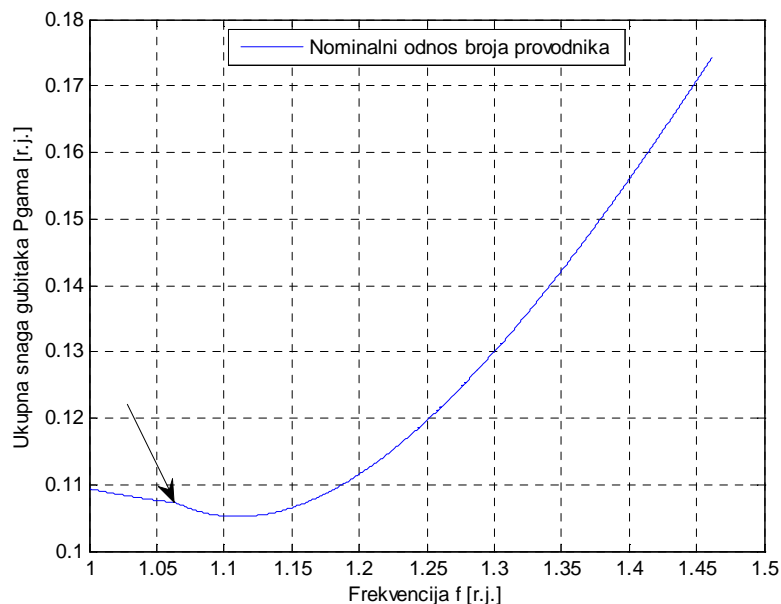
7.1 Критеријум оптимизације

Циљ овог рада је да се одреди оптимални однос броја проводника на основу минималне средње вредности снаге губитака синхронног мотора са перманентним магнетима на ротору на опсегу брзине обртања ротора $[n_{nom}, n_{max}]$. Укупна снага губитака се добија као сума снаге губитака статорског намотаја, снаге губитака у гвожђу и снаге губитака на инвертору:

$$p_{\gamma} = p_{Cu} + p_{Fe} + p_{inv} \quad (7.1.1)$$

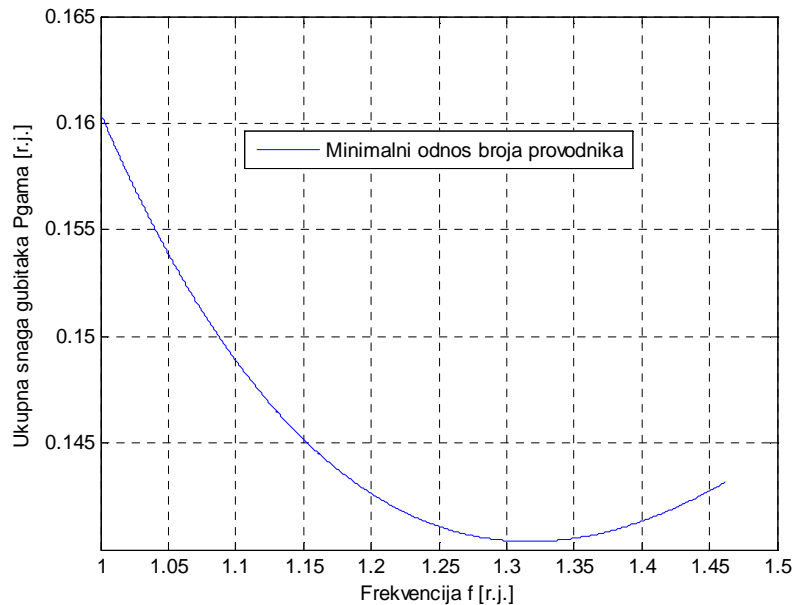
при чему су снаге губитака у баку, гвожђу и инвертору одређени релацијама (4.6.1), (6.1.17) и (3.2.3.1).

График зависности укупне снаге губитака од фреквенције за различите режиме рада који су дефинисани односом броја проводника приказан је на сликама 7.1.1, 7.1.2 и 7.1.3.



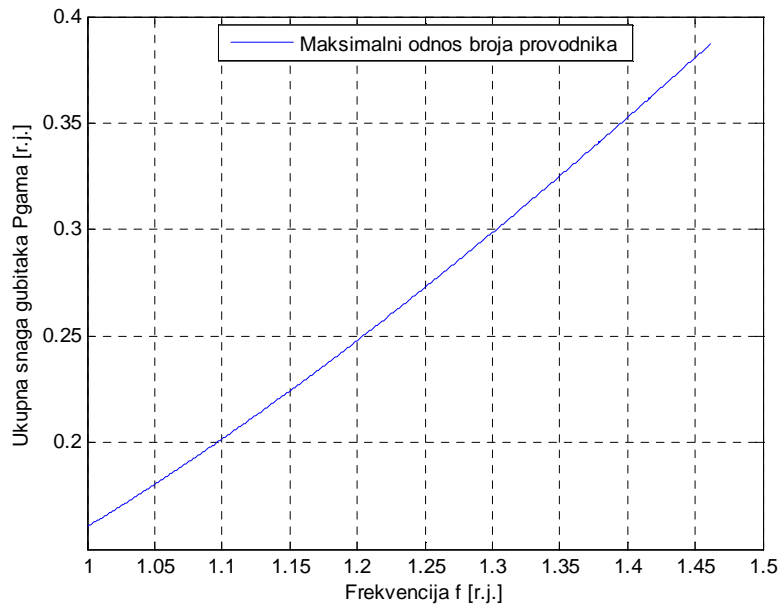
Слика 7.1.1 – Зависност укупне снаге губитака од фреквенције за режим рада дефинисан номиналним односом броја проводника

Можемо приметити да се за радни режим који је дефинисан номиналним односом броја проводника, мења нагиб карактеристике укупне снаге губитака, од оне фреквенције за коју се прелази у режим демагнетизације. Та тачка је на графику симболично означена стрелицом.



Слика 7.1.2 – Зависност укупне снаге губитака од фреквенције за режим рада дефинисан минималним односом броја проводника

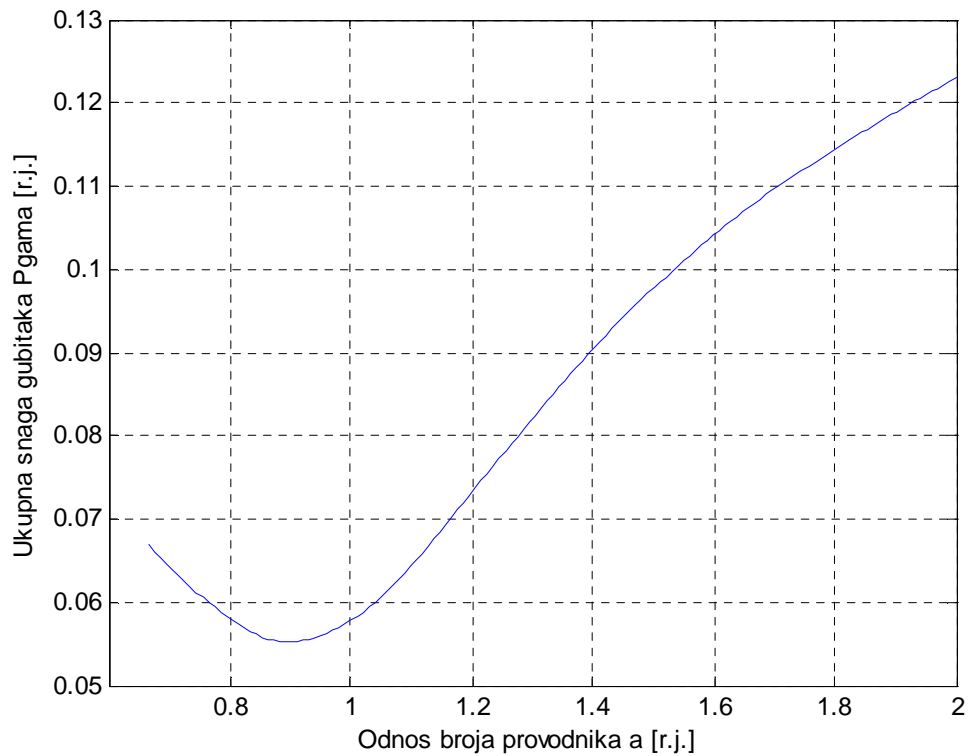
Можемо приметити да се за радни режим који је дефинисан минималним односом броја проводника не улази у режим демагнетизације. Са друге стране смањењем броја проводника увећала се потребна ефективна вредност струје статора за стварање исте магнетопобудне силе статора и истог момента као у случају номиналног односа броја проводника. То је довело до повећања губитака у проводницима и у енергетском претварачу који напаја машину. Коришћење веће струје и мањег броја проводника већег попречног пресека значајно је увећало губитке услед скин ефекта.



Слика 7.1.3 – Зависност укупне снаге губитака од фреквенције за режим рада дефинисан максималним односом броја проводника

Увећањем броја навојака умањује се скин ефекат и ефективна вредност струје у претварачу, али се значајно увећава потребна демагнетизациона струја, расипни флуks, и њему асоцирани губици снаге.

Зависност укупне снаге губитака на опсегу фреквенције дефинисане брзином обртања ротора од односа броја проводника који дефинише радни режим приказана је на слици 7.1.4.



Слика 7.1.4 – Зависности укупне снаге губитака на опсегу фреквенције дефинисане брзином обртања ротора од односа броја проводника који дефинише радни режим

На основу минимума графика ове функције одређује се оптимални однос броја проводника за који се има минимална снага губитака. То је имплементирано у функцији *glavni.m*.

7.2 Функција *glavni.m*

У функцији *glavni.m* је имплементиран поступак оптимизације односа броја проводника како би се остварила минимална снага губитака. Као први корак врши се позивање функција *faktorKR.m*, *otpornorm.m*, *struje.m*, *gvozdje.m*. Као што је показано у опису функције *faktorKR*, она одређује фактор отпорности у зависности од дискретног броја проводника. Функција *otpornorm.m* имплементира одређивање нормализоване вредности отпорности статорског намотаја за дати режим рада. У функцији *struje.m* се одређују q и d компонента статорске струје. На основу израчунатих струја као и параметара за дати режим рада у функцији *gvozdje.m* одређују се губици у гвожђу синхроне машине са перманентним магнетима на ротору.

Укупна снага губитака за дати режим рада се добија као збир снаге Цулових губитака, снаге губитака у гвожђу и снаге губитака у инвертору која је дефинисана релацијом (7.1.1).

Критеријум оптимизације је минимум снаге губитака за опсег учестаности брзине обртања ротора. Због тога ми за сваки радни режим који је дефинисан односом броја проводника одређујемо површину испод криве снаге губитака за опсег фреквенције који је дефинисан брзином обртања ротора.

Као и осталим случајевима и у овом примењујемо нумеричку интеграцију користећи трапезно правило дефинисано релацијом (4.2.4). Корак интеграције је:

$$\frac{n_{\max} - n_{\text{nom}}}{n_{\text{nom}}} \cdot \frac{1}{f_{gr} - 1}$$

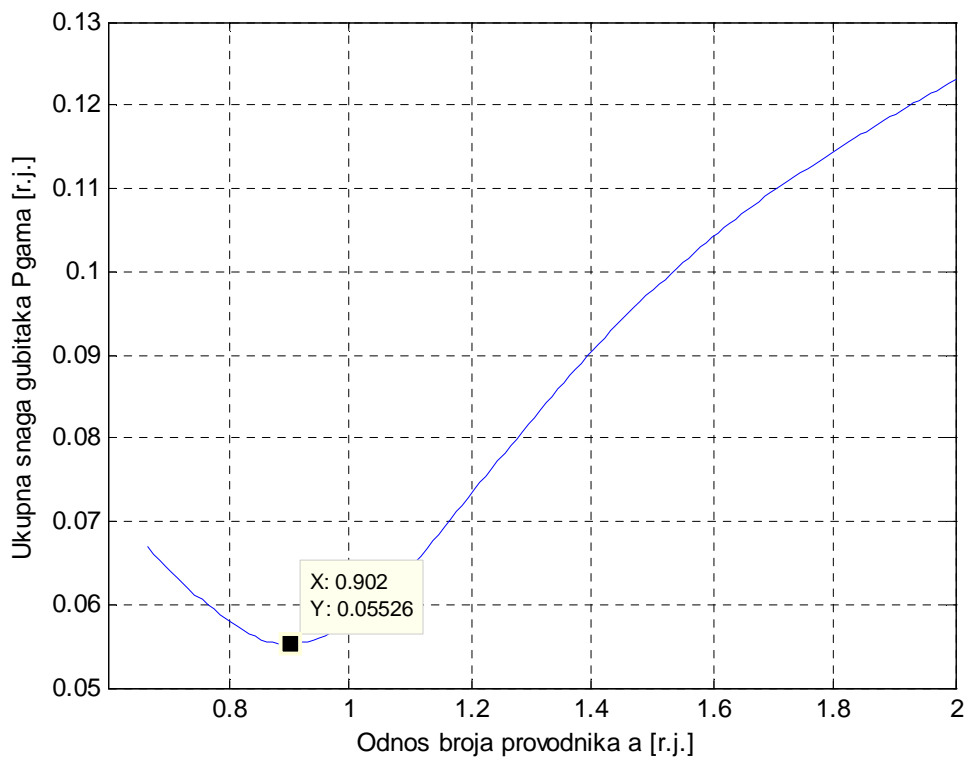
при чему је n_{\max} максимална брзина обртања мотора, n_{nom} номинална брзина обртања мотора, а f_{gr} гранични индекс фреквенције. Вредности подинтегралне функције су снаге губитака опсега учестаности за радни режим који је дефинисан односом броја проводника.

У функцији *glavni.m* фигуришу следећи параметри:

- Максимална брзина обртања ротора: $n_{\max} = 38000 \frac{\text{ob}}{\text{min}}$
- Номинална брзина обртања ротора: $n_{\text{nom}} = 26000 \frac{\text{ob}}{\text{min}}$
- Индекс граничне фреквенције: $f_{gr} = 1001$

- Индекс граничног односа броја проводника: $a_{gr} = 137$
- Номинална вредност отпорности инвертора $R_{invnom} = 0.03r.j.$

На основу конкретних параметара машине и улазних аргумената функција који фигуришу у овом раду, оптимални однос броја проводника се добија читавањем минимума графика функције 7.1.4. Смањењем односа броја проводника за 9.8% у односу на номинални однос броја проводника, остварује се минимум укупне снаге губитака у износу од $p_\gamma = 0.05526r.j.$



8. Закључак

Велики степен корисног дејства синхроних мотора са перманентним магнетима на ротору је разлог њихове широке примене код хибридних и електричних аутомобила за обављање вуче, тј. за покретање аутомобила.

У великом броју примена потребно је остварити рад у зони слабљења поља, у којој се остварује константна снага док брзина обртања варира.

Стварање побуде уз помоћ перманентних магнета на ротору отежава процес слабљења поља код оваквих мотора. Да би се слабило поље и тако повећала брзина обртања мотора, неопходно је реализовати такве статорске струје које имају негативну d компоненту струје. Другим речима, потребно је остварити такве статорске струје које једним делом умањују флуks створен магнетима односно раде тзв. демагнетизацију.

Из анализа које су спровођене у претходним поглављима закључујемо да се проблем са слабљењем поља код синхроних мотора са перманентним магнетима огледа се у томе што демагнетизациона струја резултује додатним губицима снаге. Наиме, негативна вредност струје i_d , нарочито при великим фреквенцијама увећава ефективну вредност струје статора, па су тада и снаге губитака у статорском намотају и претварачу за напајање мотора веће.

Поред тога, увећава се и флуks расипања статора што доводи до повећања додатних губитака у гвожђу који су доминантни у зупцима, а последица су расипног флуksа.

У овом раду машина је четворополна, и посматрали смо опсег брзине обртања ротора од 26000 об/мин до 38000 об/мин, на основу чега закључујемо да је основна компонента флуksа и струје простопериодична са фреквенцијом у опсегу од 2600/3Hz до 3800/3Hz. На основу овога, закључујемо флуks расипања у зупцима машине пулсира на том опсегу фреквенције. Због овога, поменути додатни губици снаге у зупцима машине услед расипног флуksа су релативно велики.

Постојање такве наизменичне струје у проводницима статора машине доводи до неравномерне расподеле електричног поља изазваног самоиндукцијом по пресеку проводника што за последицу има неравномерну расподелу струје и њено потискивање ка отвору жлеба. Из анализе скин ефекта закључили смо да је он израженији у случају када је фреквенција виша, а површина проводника већа.

Закључили смо да се смањењем броја навојака увећава потребна ефективна вредност струје статора за стварање исте магнетопобудне силе статора и истог момента. Међутим коришћење веће струје и мањег броја проводника већег

попречног пресека значајно увећава губитке услед скин ефекта који се јавља на фреквенцијама дефинисаним опсегом брзине обртања ротора. На тај начин су се повећали и губици у проводницима и у енергетском претварачу који напаја машину. Са друге стране смањењем броја навојака статорског намотаја избегнуто је коришћење слабење поља, тј. демагнетизација и проблеми везани за њу, али су се губици у гвожђу повећали.

Увећањем броја навојака закључили смо да се умањује скин ефекат, али се значајно увећава потребна демагнетизациона струја, а самим тим и ефективна вредност струје повећавајући губитке у бакру и инвертору. Са друге стране увећањем броја навојака смањили су се губици у гвожђу.

Даљи научни рад биће усмерен ка верификацији ових резултата применом методе коначних елемената узимајући у обзир додатне губитке у гвожђу, као и разна занемарења која смо увели у овом раду.

Прилог

Функција glavni.m

```
clear all
close all
clc
nnom=26000;%Nominalna brzina obrtanja rotora
nmax=38000;%Maksimalna brzina obrtanja rotora
N = 3;%Broj provodnika u zlebu %
Rsinv=0.03;%Nominalna vrednost otpornosti invertora
fgr = 1001;%Indeks granicne frekvencije
agr = 137;%Indeks granicnog odnosa broja provodnika
for k = 1:agr
    a(k)=2/3+(k-1)/102;
end
for l = 1:fgr
    f(l) = 1 + ((nmax-nnom)/nnom) * (l-1)/(fgr-1);
end

[Kr]=faktorKR(fgr,N);
sprintf('Faktor otpornosti je izracunat !')
[Rs,Krxx,b,c,Krx,Krf,Kra,K] = otpor_norm(fgr,agr,Kr,N);
sprintf('Normalizovana vrednost otpora je izracunata!')
[iqv,idv] = struje(fgr,agr,Rs);
sprintf('Struje su izracunate !')
[Pfe,Ls,teta,Bq,Bd,Br] = gvozdje(fgr,agr,iqv,idv);
sprintf('Gubici u gvozdju su izracunati !')

for l = 1:fgr
    for k = 1:agr
        rms(l,k) = sqrt(idv(l,k).^2 + iqv(l,k).^2);
        Pcu(l,k)= Rs(l,k)*(rms(l,k)).^2;
        loss(l,k) = Rs(l,k)*(rms(l,k)).^2+ Rsinv*(rms(l,k)).^2+
Pfe(l,k);
    end
end

for k = 1:agr
    gubici(k)=0.5*((nmax-nnom)/nnom)/(fgr-
1)*(loss(1,k)+loss(fgr,k)+2*(sum(loss(:,k))-loss(1,k)-loss(fgr,k)));
end

plot(a,gubici),grid
```

Функција faktorKR.m

```
function [Kr] = faktorKR(fgr,N)
Rsnom=0.025; %Nominalna otpornost statorskog namotaja
sig = 57*10^6;%Specificna otpornost bakra[S/m]
ni0 = 4*pi*10^-7;%Magnetska permeabilnost[H/m]
hz = 12*10^-3;%Visina zleba u [m]%
w = 4*10^-3; %Sirina zleba u [m]%
I=3;%Amplituda struje[A]
korak=1000;%Korak integracije
nnom=26000;%Nominalna brzina obrtanja rotora
nmax=38000;%Maksimalna brzina obrtanja rotora
ind = 0;
for l=1:fgr
    ind = 0;
    f(l) = 1 + ((nmax-nnom)/nnom) * (l-1)/(fgr-1);
    alfa(l) = sqrt(0.5*sig*ni0*f(l)*2*pi*2600/3);
    r(l) = (1+sqrt(-1)).*alfa(l);

    for n = 1:N
        h = hz/n;%Visina jednog provodnika u zlebu%
        I1 = I/n;%Struja u jednom provodniku zleba %
        ind = 0;
        for i = 1:n
            A=[w w;
                w.*exp(r(l).*h) w.*exp(-r(l).*h)];
            B=[(i-1).*I1;
                i.*I1];
            C=inv(A)*B;
            xx =-h/korak;
            for j = 1:1001,
                xx = xx + h/korak;%Visina unutar jednog provodnika
                ind = ind + 1;
                D=[r(l).*exp(r(l).*xx) -(r(l)).*exp(-r(l).*xx)];
                E=[exp(r(l).*xx) exp(-r(l).*xx)];
                H(l,ind) = abs(E*C);%Modul jacine magnetskog polja
                J(l,ind) = abs(D*C);%Modul gustine struje
                Jk(l,ind)=J(l,ind).^2;
                visina(l,ind) = (i-1)*h + xx;
            end
        end

        for i = 1:n
            for j = 1:1001
                Jq(l,i,j) = (Jk(l,j+(i-1)*1001));
            end
        end

        for i = 1:n
            int(l,i) = 0.5*h*10^-
            3*(Jq(l,i,1)+Jq(l,i,1001)+2*(sum(Jq(l,i,:))-Jq(l,i,1) - Jq(l,i,1001)));
        end
        P = 0.5*w.*int(l,:)./sig;%Snaga Dzulovih gubitaka svakog
        pojedinacnog provodnika u zlebu
    end
end
```

```
PAC(1,n) = sum(P)/n;%Srednja snaga Dzulovih gubitaka u zlebu
PDC = 0.5*(1/(sig*w*hz))*I^2;% Snaga Dzulovih gubitaka u
slucaju da u provodniku postoji jednosmerna struja
Kr(1,n) = PAC(1,n)/PDC;%Srednja vrednost faktora otpornosti po
zlebu

    end
end
```

Функција отпорnorm.m

```
function [Rs,Krxx,b,c,Krx,Krf,Kra,K] = otpor_norm(fgr,agr,Kr,N)
nnom=26000;%Nominalna brzina obrtanja rotora
nmax=38000;%Maksimalna brzina obrtanja rotora
Rsnom=0.025;%Nominalna otpornost statorskog namotaja
v=1:1:N;
Nnom = 1.5;%Nominalni broj provodnika u zlebu
    for k = 1:agr
        a(k)=2/3+(k-1)/102;
    end

    for l = 1:fgr
        b(l,:)=polyfit(v,Kr(l,:),2);
        for i = 1:length(b(l,:))
            c(l,i) = b(l,i).*Nnom.^(length(b(l,:))-i);
        end
        Krx(l,:) = polyval(c(l,:),a);    %f=const
        Kra(l,:) = polyval(c(l,:),a)/polyval(c(l,:),1);
    end

    for k = 1:agr
        Krf(:,k) = Krx(:,k)/Krx(1,k); %a=const
    end

    for l = 1:fgr
        for k = 1:agr
            a(k)=2/3+(k-1)/102;
            K(l,k)=Kra(l,k)*Krf(1,k);
            Rs(l,k) = Rsnom * a(k)^2*Kra(l,k)*Krf(1,k);
        end
    end

    for k = 1:agr
        a(k)=2/3+(k-1)/102;
    end

    for l = 1:fgr
        f(l) = 1 + ((nmax-nnom)/nnom) * (l-1)/(fgr-1);
    end
```

Функција струје.m

```
function [iqv,idv] = struje(fgr,agr,Rs)
nnom=26000;%Nominalna brzina obrtanja rotora
nmax=38000;%Maksimalna brzina obrtanja rotora
for l = 1:fgr
    f(l) = 1 + ((nmax-nnom)/nnom) * (l-1)/(fgr-1);

    for k = 1:agr
        a(k)=2/3+(k-1)/102;
        Lsnom = 0.2;%Nominalna vrednost induktivnosti statorskog
namotaja
        Psinom = 0.89;%Nominalna vrednost fluksnog obuhvata statora
koji potice od permanentnih magnetna na rotoru
        Pnom = 1;%Nominalna snaga
        %Parametri motora za izmenjeni broj provodnika
        Ls(k) = Lsnom * a(k)^2;
        Psi(k) = Psinom * a(k);
        iqv(l,k) = Pnom/f(l)/Psi(k);
        if ( ( f(l) .* Ls(k) .* iqv(l,k)).^2 + (Rs(l,k)*iqv(l,k)+f(l)
* Psi(k) ).^2 < 1 ))
            idv(l,k) = 0;
        else
            aa(l,k) = Rs(l,k).^2+f(l) * f(l) * Ls(k)^2;
            bb(l,k) = 2 * f(l) * f(l) * Ls(k) * Psi(k);
            cc(l,k) = (f(l) * Ls(k) * iqv(l,k))^2 +
(Rs(l,k)*iqv(l,k)+f(l) * Psi(k))^2 - 1;
            xxx=roots([aa(l,k) bb(l,k) cc(l,k)]);
            if(xxx(1) > 0) xxx(1) = 0; end
            if(xxx(2) > 0) xxx(2) = 0; end
            if(xxx(1) < xxx(2)) idv(l,k)= xxx(2); else idv(l,k) =
xxx(1); end
            end
        end
    end
end
```

Функција gvozdje.m

```
function [Pfe,Ls,teta,Bq,Bd,Br] = gvozdje(fgr,agr,iqv,idv)
nnom=26000;%Nominalna brzina rotora
nmax=38000;%Maksimalna brzina rotora
anom=1;%Nominalni odnos broja provodnika
lnom=1;%Indeks nominalne frekvencije
knom=35;%Indeks nominalnog odnosa broja provodnika
teta=[];
ugao=0;
Bmr=1;
Lsnom = 0.2;%Nominalna vrednost induktivnosti statorskog namotaja
korak = 100;
for l = 1:fgr
    f(l) = 1 + ((nmax-nnom)/nnom) * (l-1)/(fgr-1);

    for k = 1:agr
        a(k)=2/3+(k-1)/102;
        Ls(k) = Lsnom * a(k)^2;
        Br=Bmr;%Indukcija permanenetnog magnetа
        Bq(l,k)=Ls(k)*iqv(l,k)/a(k);%Indukcija koja potice od q
komponente struje
        Bd(l,k)=Ls(k)*idv(l,k)/a(k);%Indukcija koja potice od d
komponente struje
        Bqnom=Lsnom*iqv(lnom,knom)/anom;
        Bdnom=Lsnom*idv(lnom,knom)/anom;
        ugao=0;
        for j=1:(korak+1)
            teta(j)=ugao;

            B(l,k,j)=(Br*cos(teta(j))+Bq(l,k)*sin(teta(j))+Bd(l,k)*cos(teta(j)));

            Bnom(j)=(Br*cos(teta(j))+Bqnom*sin(teta(j))+Bdnom*cos(teta(j)));
            BB(l,k,j)= B(l,k,j).^2;
            BBnom(j)=Bnom(j).^2;
            ugao = ugao + 2*pi /korak;
        end
        integr(l,k)
    =f(l)^2*0.5*(2*pi/korak)*(BB(l,k,1)+BB(l,k,korak+1)+2*(sum(BB(l,k,:))-
BB(l,k,1)-BB(l,k,korak+1)));
        intnom =
    0.5*(2*pi/korak)*(BBnom(1)+BBnom(korak+1)+2*(sum(BBnom)-BBnom(1)-
BBnom(korak+1)));
        Pfe(l,k)=0.04*integr(l,k)/intnom;
    end
end
```


Литература

- [1] Др Јован Сурутка: *Електромагнетика*, Електротехнички факултет Београд, 1975.
- [2] С. Н. Вукосавић: *Пројектовање адаптивног микропроцесорског управљања брзином и позицијом асинхроног мотора*, докторска дисертација, Електротехнички факултет Београд, 1989.
- [3] С. Н. Вукосавић: *Скрипта са предавања из предмета Електричне машине*, Електротехнички факултет
- [4] В. Вучковић: *Опита теорија електричних машина*, Наука, Београд, 1992.
- [5] Г.В. Миловановић: *Нумеричка анализа I део*, Научна књига, Београд, 1985.