УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

•КАТЕДРА ЗА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТСКЕ ПРЕТВАРАЧЕ И ПОГОНЕ•

Метод за синтезу дигиталног закона управљања серво системом са еластично спрегнутим масама

•МАГИСТАРСКИ РАД•

КАНДИДАТ:
ЖЕЉКО МАРКОВИЋ, ДИПЛ. ИНЖ.
БР. ДОСИЈЕА: 92/97

МЕНТОР:
ДР. СЛОБОДАН Н. ВУКОСАВИЋ,
ДИПЛ. ИНЖ.

•БЕОГРАД, 2003. ГОДИНЕ•

•САДРЖАЈ•

1 УВОД

1.1 КРАТАК САДРЖАЈ РАДА

Предмет научне расправе у магистарском раду је предлог пројектовања дигиталног закона управљања брзином код серво погона са машином наизменичне струје који са оптерећењем чини систем са дистрибуираним масама, у условима еластицитета осовине и деловања промењљивог оптерећења, при чему се при пројектовању користи метод подешавања полова (pole placement [1], [2] или pole assignement technique[3]). Основна идеја на којој се заснива метод подешавања полова је да се захтеви у погледу прелазног процеса управљаних промењљивих дигиталног система управљања могу специфицирати преко полова система у затвореној повратној спрези.

У раду се показује да се, уколико је систем потпуно контролабилан по стању, полови система могу поставити на било ком (жељеном) месту у *z*–равни користећи се адекватном повратном спрегом са појачањима, по промењљивама стања. Уколико неке од промењљивих у простору стања нису директно мерљиве, користе се вредности чија се процена врши у опсерверу. Осим приступа пројектовању регулатора методом подешавања полова у простору стања, сличан дизајн система може се извршити и уколико је систем задат са функцијом дискретног преноса. Овај приступ у пројектовању се у често назива и приступом са полиномијалним једначинама. Циљ рада је проналажење оригиналног метода за синтезу, као и сама синтеза дигиталног линеарног регулатора серво система са више маса које су еластично спрегнуте приступом са полиномијалним једначинама. У оквиру рада извршено је утемељивање овог алгоритма и његова "аутоматизација", чиме је омогућена његова примена у системима са самоподешавајућим регулаторима, где се уз примену одговарајуће методе за идентификацију параметара серво-система постиже ефикасна регулациона структура која може да обезбеди адекватну регулацију у условима варијације параметара погона. Стога се у раду испитује типичан серво-погон са еластично спрегнутим масама, као и утицај свих појединих компоненти и проблема који се јављају на његов рад. Ова анализа служи за синтезу и доношење одлука током пројектовања дигиталног закона управљања брзином серво-погона, при чему се тежи да се свеобухватно отклони или минимизира утицај свих чиниоца који утичу на смањење пропусног опсега регулатора и деградацију перформанси серво-система. Као резултат претходних разматрања, на основу предложеног конкретног алгоритма процедуре пројектовања дигиталног регулатора серво-система методом подешавања полова начињена је апликација тј. графички интерфејс према кориснику (Graphical User Interface) у програмском окружењу Matlab® 6.0.

У оквиру рада анализирани су проблеми појаве механичке резонансе и начини њеног превазилажења кроз одговарајућу структуру дигиталног закона управљања, извршено је математичко моделовање серво погона који са оптерећењем чини систем са дистрибуираним масама, у условима еластицитета осовине и деловања промењљивог оптерећења. Испитани су различити режими рада таквог погона при различитим подешењима дигиталног регулатора и за лабораторијски setup као један конретан серво погон са еластично спрегнутим масама, приказан је алгоритам за идентификацију функције преноса датог система који је резултовао конкретном дискретном функцијом преноса. На основу добијене дискретне функције преноса извршено је пројектовање дигиталног закона управљања методом подешавања полова и испитане су његове карактеристике.

Резултати рада су презентирани у виду метода аналитичког пројектовања, прорачуна и програмских решења на рачунару, рачунарских симулација и експерименталних мерења на лабораторијском прототипу погона.

1.2 ПРОБЛЕМАТИКА И ПРЕГЛЕД РЕШЕЊА РЕГУЛАТОРА БРЗИНЕ СЕРВО ПОГОНА

Потреба аутоматизације производних процеса у индустрији, повећање поузданости и смањење трошкова узрокује рад у области развоја микропроцесорски контролисаних електромоторних погона. Данас се у индустријски развијеним земљама око **60%** произведене електричне енергије претвара у механичку енергију путем електромоторних погона. Притом се могу срести електромоторни погони широког опсега снага, момената и брзина, у скоро свим радним условима. Око **60%** електромоторних погона чине нерегулисани погони – погони са константном брзином, електромоторних погона са променљивом брзином (груба регулација брзине) има око **30%**, док на серво погоне са фином регулацијом брзине и позиције отпада преосталих **10%** [4], [5]. У оквиру последње две категорије углавном је коришћен мотор једносмерне струје (**DC** мотор), због врло повољних регулационих карактеристика. Наиме, код ове врсте машина за електромеханичко претварање енергије омогућено је распрегнуто управљање електромагнетним моментом и флуксом, будући да постоји могућност директне контроле над струјама у ротору и статору што обезбеђује механички комутатор. Механички комутатор је управо и једна од највећих слабости машина за једносмерну струју, јер захтева редовно одржавање и смањује преоптеретљивост мотора, ограничавајући максимално дозвољену струју индукта (арматуре) [6]. Са друге стране асинхрони мотор је комплекснији за управљање, будући да у већини случајева (асинхрони мотор са кратко спојеним намотајем на ротору) постоји могућност директне контроле само над струјама статора. У случају асинхроног мотора процес комутације се обавља ван мотора, у енергетском претварачу [7]. Предност асинхроног мотора над једносмерним мотором је у његовој робусности – преоптеретљивији је у односу на једносмерни мотор, конструктивно је једноставнији и практично не захтева одржавање [8]. Усавршавањем брзих полупроводничких енергетских прекидача и брзих микропроцесора, асинхрони мотор постаје економски оправданији и поузданији избор у серво погонима високих перфоманси у односу на једносмерни мотор [9]. Поред асинхроног мотора веома широку примену у високоперформантним апликацијама серво погона имају и синхрони мотори, и то синхрони мотори са сталним магнетима (DC brushless motor).

Распрегнута контрола флукса и момента асинхроног мотора, се постиже применом концепта векторског управљања (у литератури се још среће под називом контрола путем оријентације поља), односно оријентацијом вектора магнетопобудне силе статора према роторском флуксу. Принципе векторског управљања први излаже Blaschke [10], који даје основе директног векторског управљања. Елементе индиректног векторског управљања даје Hasse [11], а потом следи велики број радова како страних тако и домаћих аутора [7], [12].

За независно управљање флуксом и моментом асинхроног мотора неопходно је познавати параметре мотора, што иницира појаву више радова у којима се анализира осетљивост на промене параметара и предлажу методе за идентификацију. Показује се да је исправан рад векторски контролисаног погона условљен познавањем временске константе ротора [13], [14], па се предлаже читав низ алгоритама за идентификацију временске константе ротора [5], [15], [16], [17]. Коректан рад векторске контроле, такође зависи и од брзине и тачности управљања магнетопобудном силом статора, што је одређено конфигурацијом енергетског претварача и прекидачким алгоритмом за управљање струјама. Стога се јавља читав низ радова који се баве дизајном регулатора струје, при чему се употребљавају и линеарни и нелинеарни прекидачки алгоритми [7], [18].

Векторски контролисан асинхрони мотор се по регулационим карактеристикама изједначава са мотором једносмерне струје, па при синтези брзинског и позиционог регулатора може као почетна структура да се усвоји структура регулатора која се примењује код мотора једносмерне струје [19], [20]. Код векторски контролисаног асинхроног мотора који се напаја из напонског инвертора са струјном регулацијом, време одзива електромагнетног момента се може занемарити у односу на временске константе успостављања променљивих унутар механичког подсистема [21]. Када се усвоји одговарајућа структура регулатора и параметри подесе ваљано, електрични подсистем векторски контролисаног мотора се може посматрати као блок појачања са симетричним лимитом у виду максималног електромагнетног момента који је ограничен коначним струјним капацитетом претварача. Параметри механичког подсистема за који се узима да је систем са једном масом, у првом реду момент инерције асинхроног мотора, имају доминантан утицај на распоред полова и одзив система. Да би се дошло до адекватног дигиталног закона управљања потребно је синтезу регулатора извршити тако да се реализују следећи захтеви и циљеви у оптималној форми:

- **стабилност** – систем са затвореном повратном спрегом треба да буде стабилан;
- **праћење (tracking)** – реалан излаз треба да прати сигнал референце;
- **одбацивање поремећаја** – излаз треба да буде ослобођен утицаја поремећаја;
- **одбацивање шума мерења** – шум који ствара сензор не треба да утиче на излаз система;
- **избегавање сатурације актуатора** – актуатор треба да ради у линеарном режиму, и
- **робусност** – ако се реалана динамика система промени за неки износ (а слично важи и за актуатор и за сензор), перформансе система односно све жељене карактеристике, не смеју се погоршати до неприхватљивог нивоа.

Јасно је да сви услови могу бити испуњени само у одређеној мери. Тако, на пример, смањењу утицаја ефекта поремећаја као и минимизацији грешке праћења који изискују већи ниво управљачког сигнала се супроставља смањена стабилност, будући да актуатор може да уђе у зону сатурације, и шум сензора, који ће се појачати до неприхватљивог нивоа. Ово се може превазићи увођењем актуатора са већим опсегом линеарног режима и сензором са мање шума, што за собом повлачи употребу снажнијих актуатора и прецизнијих сензора, који са друге стране поскупљују решење. Стога и економски принцип дефинише компромисе које је потребно учинити.

Такође, као пример се може навести и захтев за робусношћу система који смањује друге захтеве. Наиме уколико желимо да повећамо робусност система не треба пројектовати регулатор само према процесу, већ је потребно разматрати и следеће аспекте:

- **немоделирану динамику система** – номинални модел се узима као линеаран, временски непроменљив и малога реда, насупрот чињеници да је реалан процес компликованији;
- **временску варијантност** – реална динамика сваког физичког процеса се нужно мења са временом будући да су сви механички делови подложни старењу, утицају агресивног окружења а понекад и атмосферским утицајима, као и другим променама;
- **варијације оптерећења** – динамика процеса се мења и са променом оптерећења;
- **варијације произвођача компоненти** – прототип процеса се може оакратерисати веома поуздано, али то није од користи ако је варијанса серијске производње велика, и
- **ограничену идентификацију** – чак и да је процес линеаран и временски инваријантан, морамо да извршимо мерења како би идентификовали тај процес, што се не може учинити без грешке будући да мерна опрема није савршена као и да методи идентификације користе ограничени сет података на одређеној периоди одабирања, па ће сигурно патити од недостатака.

Стога велики број аутора предлаже више различитих приступа при синтези дигиталног регулатора брзине и позиције за серво погоне са машином наизменичне струје. Тако се при одређивању структуре регулатора брзине за серво погоне код којих се мотор – осовина – оптерећење могу посматрати као једна маса чине кораци у два правца; Lin и Tsai [22], као и Bose [23], предлажу регулаторе са варијабилном структуром (енгл. sliding mode control) који повећавају робусност система чинећи га мање осетљивим на варијације параметара механичког подсистема, али такође уносе нежељене флуктуације електромагнетног момента. Практична употреба сервоактуатора изискује минимизацију високофреквентних компоненти шума мерења које се одсликавају на појаву шума ("рипла") у електромагнетном моменту јер ови чиниоци доводе до нежељеног загревања мотора, осцилација и до одступања по брзини и положају. Други правац су регулатори чија је структура линеарна, спадају у класу класичних индустријских регулатора (PI, PID регулатори), при чему се аутори фокусирају на предлог различитих метода за подешавање параметара регулатора. Код позиционих серво система Haneda и Nagao [24] предлажу подешавање параметара минимизацијом квадратног показатеља квалитета динамичког понашања, док Стојић и Вукосавић [25] предлажу подешавање параметара регулатора минимизацијом показатеља квалитета динамичког понашања. Овакви начини подешавања параметара налазе и примену код брзинских серво система [26], [27]. Ови регулатори могу да одговоре на захтеве само у ограниченом броју случаја; у случају погона са дистрибуираним масама резултују деградацијом перформанси.

Савремене примене серво погона у области алатних машина, роботике и уопште узевши аутоматизације у индустрији захтевају високе вредности пропусног опсега брзинске петље регулације. Пропусни опсези брзинских петљи захтевани од на пример нумеричке машине, сечења воденим млазом или ласерским зраком превазилазе вредности од 100 до 200 Hz. Са друге стране повећање вредности пропусног опсега брзинске петље ограничено је са више различитих чиниоца као што су:

- коначна периода одабирања дигиталног регулатора,
- несавршености и коначни струјни капацитет инвертора из кога је мотор напајан и који уносе нелинерност типа ограничења,
- несавршеност сензора брзине на осовини мотора који утиче на појаву високофреквентних компоненти шума мерења које се преносе на флуктуације момента и утичу на повећане губитке и деградацију перформанси, и
- коначна дужина речи дигиталног сигналног процесора (аритметика у непокретном зарезу) који уносе проблеме квантизације променљивих у самом дигиталном регулатору.

Уз поменуте проблеме серво-мотори су у типичним индустријским окружењима повезани са крајњим актуаторима путем трансмисионог механизма који има ограничену крутост па тако еластично повезани мотор и оптерећење чине механички систем са еластично спрегнутим масама. Наведени еластично повезан систем са две масе уводи коначне нуле и пар коњуговано комплексних полова у функцију преноса објекта регулације доводећи до проблема механичке резонансе. Појава механичке резонанције у одређеном фреквентном опсегу, који се може поклопити са опсегом брзинске петље, може изазвати подржане осцилације које механички могу оштетити серво-погон. Наиме, типичан синхрони мотор са перманентим магнетима, са оптерећењем које има бесконачно велику инерцију и који је круто везан на роторску осовину, има резонантну учестаност која се налази у рангу од 500 Hz до 2 kHz. Међутим, овакви мотори су углавном повезани путем редукционе трансмисије омогућавајући употребу мотора великих брзина који имају велики однос снага/маса. Оваква спрега мотора и оптерећења може имати нижу вредност коефицијента крутости везе. Чак и са ниском вредношћу момента инерције ротора, овај еластицитет може резултовати механичким резонатним учестаностима од 30 Hz до 300 Hz.

Поменути разлози послужили су као мотив великом броју страних и домаћих стручњака да раде на проналажењу адекватног дигиталног закона управљања брзином и позицијом серво-погона са еластично спрегнутим масама.

Проблеми механичке резонансе су први пут уочени код погона у ваљаоницама метала [28]-[31]. Код ових погона дугачке осовине погона са великим моментима инерције мотора и оптерећења сачињавају слабо пригушени механички резонатор који уноси резонанцу у релативно ниском фреквентном опсегу (10-20 Hz). Вибрације које се јављају услед удара оптерећења и одскочног улаза, механички могу оштетити серво-погон и погоршавају квалитет добијеног производа.

При одређивању струкуре серворегулатора чинили су се кораци у више праваца, предлагана су различита решења која се могу поделити у три главне групе:

1. Регулатори засновани на директном мерењу свих релевантних променљивих са стране мотора и оптерећења [32], [33];
2. Регулатори са једним сензором и опсервером кој естимира остала стања [31], [34], [35], и
3. Пригушење вибрација засновано на примени дигиталних филтара (ноч филтара) и компензатора у конвенционалним регулаторима брзине [34], [36], [37].

Meschat [38] предлаже повећање маргине стабилности увођењем компензатора или ноч филтра са централном учестаношћу на учестаности механичке резонансе. Жељено пригушење система се може обезбедити подешавањем управљачког сигнала према првом изводу момента оптерећења [28], [34].

Проблем механичких осцилација се може ублажити и применом управљања према референтном моделу [39], [40]. Екситација резонантних модова се може смањити увођењем регулационе петље по убрзању [41]. У том циљу неопходно је посматрати и управљати убрзањем на страни оптерећења, што изискује мерење положаја на тој страни. Отклањање изненадних скокова електромагнетног момента мотора, односно лимитирање убрзања мотора искључује екситацију резонантних модова са стране мотора, тако да се механичка резонанција може побудити једино са стране оптерећења.

Жељено пригушење резонансе се може постићи и додавањем члана у регулатору брзине који има пропорционално дејство на диференцу брзине [32], [33], што захтева мерење положаја осовине и на страни мотора и на страни оптерећења. Примена два сензора на осовини није практична у индустријском окружењу, па стога многи аутори упућују на естимацију момента и брзине оптерећења применом опсервера стања [29], [30], [31].

Стојић и Вукосавић у свом раду [37] предлажу примену серијског ноч филтра који потискује резонантну учестаност у односу релативног пригушења нула и полова филтра. На овај начин екситација резонантних модова се може смањити, али не и комплетно елиминисати. У истом раду се предлаже, на веома једноставан начин, и потпуно уклањање побуђивања резонантних модова увођењем FIR филтра у пропорционално-интегрални регулатор брзине. Ипак да би наведени филтар био ефикасан потребно је познавати периоду механичких осцилација.

Употреба линеарних регулатори вишег реда као што су регулатор у простору стања или полиномијални регулатор може елиминисати торизоне вибрације и унапредити перформансе регулисаног електромоторног погона [1], [3], [5], [42]. Погодност употребе линеарних полиномијалних регулатора се огледа и у томе што постоји могућност за подешавањем полова система у затвореној спрези на основу мерења само једне брзине (мотора или оптерећења) без експлицитне реализације опсервера стања. Уопштена процедура синтезе оваквих регулатора је описана у [2]. Апликације оваквих регулатора у регулисаним електромоторним погонима са еластично спрегнутим масама су описане у [42] - [44]. У оквиру овог магистарског рада у односу на поменуте радове биће дата детаљнија анализа синтезе оваквог регулатора која обухвата и практичне аспекте као што су грешке у моделирању, избор полинома опсервера, избор функције спрегнутог преноса и друге, као и укључивање интерног модела поремећаја у оквиру процедуре синтезе регулатора.

Наведени радови показују да активности на развоју алгоритама управљања серво погонима високих перформанси трају несмањеним интезитетом, и да се даље трага за адекватним решењима која ће обезбедити аутоматско прилагођење алгоритама управљања условима погона и обезбедити подешавање параметара без учешћа човека.

1.3 Структура рада

Рад се бави пројектовањем алгоритама за синтезу линеарног полиномијалног дигиталног регулатора брзине код серво погона са дистрибуираним масама повезаних са еластичном осовином. У оквиру пројектовања регулатора укључен је и интерни модел поремећаја и начињена упоредна анализа оваквог регулатора брзине имајући у виду практичне аспекте као што су грешке у моделирању, избор полинома опсервера, избор функције спрегнутог преноса и друге. У оквиру рада ће бити приказани алгоритми за одређивање параметара функције преноса серво система чије познавање омогућава коректно пројектовање регулатора брзине.

У другом поглављу биће укратко описана метода за пројектовање дигиталног закона управљања система у простору стања која се назива метода подешавања полова. У оквиру овог поглавља биће показано да се захтеви у погледу прелазног процеса управљаних променљивих дигиталног система управљања могу специфицирати преко полова система у затвореној повратној спрези. Такође ће бити показано, да ако је систем потпуно контролабилан по стању и ако је могуће формирати потпуну повратну спрегу по променљивама стања, тада преко одговарајуће матрице појачања у повратној спрези полови система могу узети било коју жељену вредност.

У трећем поглављу биће показано да осим приступа пројектовању регулатора методом подешавања полова у простору стања, сличан дизајн система можемо извршити и уколико је систем задат са функцијом дискретног преноса. Овај приступ у пројектовању се у често назива и приступом са полиномијалним једначинама. Како је овај приступ погодан за пројектовање регулатора за серво системе његово детално разматрање биће извршено у овом поглављу, а потом ће бити предложен конкретан алгоритам заснован на методи подешавања полова приступом са полиномијалним једначинама.

Као резултат разматрања у трећем поглављу, у четвртом поглављу биће дат сиже у виду конкретног алгоритма процедуре пројектовања дигиталног регулатора серво-система методом подешавања полова. На основу предлога овог алгоритма, у наставку овог поглавља биће презентирана начињена апликација тј. графички интерфејс према кориснику (Graphical User Interface) у програмском окружењу Matlab® 6.0.

Препознавање и разумевање математичког модела серво погона је битно у процесу пројектовања дитигалног закона управљања једним оваквим системом. Стога ће у оквиру петог поглавља бити извршено извођење и детаљно описивање математичког модела серво погона погодног за коришћење у рачунарским симулацијама који је проистекао на основу теоријског разматрања и анализе појединих компоненти реалног серво погона високих перформанси са еластично спрегнутим масама, имајући у виду све аспекте као што су динамика актуатора, ограничена резолуција и динамика сензора на осовини.

На основу разматрања учињених у претходним поглављима, у оквиру шестог поглавља биће извршена анализа и синтеза регулатора брзине серво погона са еластично спрегнутим масама користећи се методом подешавања полова, а на конкретном примеру серво погона. На нивоу рачунарских симулација кроз конкретне конфигурације погона биће анализиран утицај појединих карактеристичних параметара на стабилност система у затвореној повратној спрези. Такође, кроз извршене рачунарске симулације биће приказане перформансе регулатора добијеног методом подешавања полова и упоредиће се његове карактеристике са стандардним регулатором пропроционално-интегралног типа (**PI** регулатор).

У седмом поглављу, за један конретан серво погон са еластично спрегнутим масама, биће приказан алгоритам за идентификацију функције преноса датог система и даће се резултати те идентификације, на основу којих ће се у извршити пројектовање дигиталног закона управљања методом подешавања полова. Најпре ће се изнети неке теоријске основе научне дисциплине која се бави идентификацијом система, а потом дати кратак опис лабораториског setup-а. У наставку овог поглавља биће приказан сам процес идентификације лабораторијског серво погона са еластично спрегнутим масама и добијени резултати, а потом ће се на основу датих резултата извршити синтеза регулатора методом подешавања полова и сагледати његове карактеристике.

2 МЕТОДА ПОДЕШАВАЊА ПОЛОВА ЗА СИСТЕМ У ПРОСТОРУ СТАЊА

У овом поглављу биће укратко описана метода за пројектовање дигиталног закона управљања система у простору стања која се назива метода подешавања полова (pole placement [1], [2] или pole assignement technique[3]). Захтеви у погледу прелазног процеса управљаних променљивих дигиталног система управљања се могу специфицирати преко полова система у затвореној повратној спрези. Као што ће бити показано, ако је систем потпуно контролабилан по стању и ако је могуће формирати потпуну повратну спрегу по променљивама стања, тада преко одговарајуће матрице појачања у повратној спрези полови система могу узети било коју жељену вредност.

2.1 Метода подешавања полова за систем у простору стања

Претпоставимо да се систем којим желимо да управљамо може описати са следећом диференцијалном једначином стања:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \tag{2.1}$$

где су: *x(t)* вектор стања, *u(t)* вектор улаза, *A* и *B* константне матрице. Дискретизацијом система, одређује се дискретни модел континуалног дела система у виду диференцне једначине стања:

$$x(kT+T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT), \tag{2.2}$$

где су матрице Φ и Γ дате са:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{AT}, \\ \Gamma &= \left(\int_0^T e^{As} ds \right) B. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Такође претпоставимо да се дејство поремећаја који делују на систем може представити поремећајем типа почетних услова. Претоставимо да су све координате вектора стања мерљиве, тј. да је могуће формирати потпуну негативну повратну спрегу по стањима:

$$u(kT) = -Lx(kT). \tag{2.4}$$

Решење проблема подешавања полова у случају да је *u(t)* скаларна величина, за систем описан са (2.2), се може извршити на следећи начин; систем (2.2) се може трансформисати у следећу форму:

$$z(kT+T) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} z(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(kT), \tag{2.5}$$

где је:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{2.6}$$

карактеристични полином матрице Φ. Претпоставимо да желимо да карактеристични полином система у затвореној спрези буде:

$$P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n . \tag{2.7}$$

Тада следи из (2.4) да закон управљања у повратној спрези:

$$u = -\widetilde{L} z , \tag{2.8}$$

где је

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 & \cdots & p_n - a_n \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

резултује сисемом са затвореном повратном спрегом чији је карактеристични полином дефинисан са (2.7). Закон управљања (2.8) се може записати још и као:

$$u = -\widetilde{L} z = -\widetilde{L} H x = -L x , \tag{2.10}$$

где H дефинише трансформацију од x до z. Преостаје још да дефинишемо матрицу трансформације H . Нека су W_c и $\widetilde{W}_c$ матрице контролабилности за (2.2) и (2.5), и нека је њихова међусобна веза дефинисана са:

$$\widetilde{W}_c = H W_c . \tag{2.11}$$

Даље је:

$$\widetilde{W}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Матрица трансформације H се може одредити на основу следеће релације:

$$H = \widetilde{W}_c W_c^{-1} . \tag{2.13}$$

Имајући у виду матрицу $\widetilde{\Phi}$ система (2.5) и користећи се Cayley-Hamilton-овом теоремом [3] која каже да $\widetilde{\Phi}$ задовољава своју сопствену карактеристичну једначину, добија се на основу израза (2.7):

$$\begin{aligned} P(\Phi) &= \widetilde{\Phi}^n + p_1 \widetilde{\Phi}^{n-1} + \ldots + p_n I = \\ &= (p_1 - a_1)\widetilde{\Phi}^{n-1} + \ldots + (p_n - a_n) I \end{aligned} . \tag{2.14}$$

Израз (2.9) постаје:

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} P\left(\widetilde{\Phi}\right). \tag{2.15}$$

Уз

$$\widetilde{\Phi} = H \Phi H^{-1}, \tag{2.16}$$

биће

$$L = \widetilde{L} H = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} P\left(H \Phi H^{-1}\right) H = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} H P(\Phi). \tag{2.17}$$

Даље, на основу једначине (2.12), може се писати:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \widetilde{W}_c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

па је:

$$L = \tilde{L}\widetilde{W}_c W_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} W_c^{-1} P(\Phi). \tag{2.19}$$

Једначина (2.19) се назива Ackermann-ова формула [2], [3].

2.2 Опсервер стања

Решење проблема које је дато у досадашњем излагању, подразумева да су све координате стања система мерљиве. У случају да је повратна спрега по координатама вектора стања непотпуна, могуће је решити проблем ако се претходно пројектује опсервер који на основу мерљивих променљивих и улаза објекта управљања рекоструише (процењује) стање система [2], [45]. Разматрајмо систем (2.20):

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ \qquad y(k) = Cx(k) \end{cases}. \tag{2.20}$$

Претпоставимо да се стање x апроксимира са стањем $\hat{x}$ модела:

$$\hat{x}(k+1) = \Phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k), \tag{2.21}$$

који има исти улаз као и систем (2.20). Ако је модел (2.21) савршен у смислу параметара система (2.20) и уколико су почетни услови у (2.20) и (2.21) исти, тада ће стање $\hat{x}$ модела бити идентично стању x реалног система (2.20). Уколико су почетни услови у (2.20) и (2.21) различити, онда ће стање $\hat{x}$ модела конвергирати стању x реалног система (2.20) само уколико је он асимптотски стабилан. Реконструкција стања система наведена у (2.21) се може унапредити увођењем разлике између мереног и процењеног излаза у облику повратне спреге:

$$\hat{x}(k+1 \mid k) = \Phi\hat{x}(k \mid k-1) + \Gamma u(k) + K\left[y(k) - C\hat{x}(k \mid k-1)\right], \tag{2.22}$$

при чему је потребно изабрати матрицу *K*. Израз $\hat{x}(k+1 \mid k)$ означава процену стања $x(k+1)$ на основу мерења из претходног тренутка. Дефинишимо грешку реконструкције:

$$\tilde{x} = x - \hat{x}. \tag{2.23}$$

Одузимањем израза (2.22) од (2.20), добија се:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1 \mid k) &= \Phi\tilde{x}(k \mid k-1) - K\left[y(k) - C\hat{x}(k \mid k-1)\right] = \\ &= \left[\Phi - KC\right]\tilde{x}(k \mid k-1) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Уколико је *K* изабрано тако да је систем (2.24) асимптотски стабилан, грешка реконструкције ће увек конвергирати ка нули. Такође, увођењем повратне спреге по мерењу у процес реконструкције, могуће је постићи конвергенцију грешке реконструкције ка нули и у случају да је систем (2.20) нестабилан. Систем који је дефинисан са (2.22) се назива опсервером за систем (2.20) јер даје процену стања система на бази мерења улаза и излаза система.

Постоји много варијација опсервера који је дефинисан са (2.22). Како опсервер дат са (2.22) садржи кашњење, јер $\hat{x}(k \mid k-1)$ зависи само од мерења до тренутка $k-1$, може се користити следећа његова модификација да би се избегло кашњење:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k \mid k) &= \Phi\hat{x}(k-1 \mid k-1) + \Gamma u(k-1) + K\left[y(k) - C\left\{\Phi\hat{x}(k-1 \mid k-1) + \Gamma u(k-1)\right\}\right] = \\ &= \left[I - KC\right]\left[\Phi\hat{x}(k-1 \mid k-1) + \Gamma u(k-1)\right] + Ky(k) \end{aligned}. \tag{2.25}$$

Грешка реконструкције када се користи (2.25) је дата са:

$$\tilde{x}(k \mid k) = x(k) - \hat{x}(k \mid k) = (\Phi - KC\Phi)\tilde{x}(k-1 \mid k-1). \tag{2.26}$$

Приметимо да су нуле израза $(\Phi - KC\Phi)$ подешљиве адекватним избором матрице *K*. Такође важи:

$$\begin{aligned} y(k) - C\hat{x}(k|k) &= C\tilde{x}(k|k) \\ &= (C\Phi - CKC\Phi)\tilde{x}(k-1|k-1) \\ &= (I - CK)C\Phi\tilde{x}(k-1|k-1) \end{aligned}$$

Ако систем има p излаза, тада је $I - CK$ матрица димензија $p \times p$; *K* може бити изабрано тако да буде испуњен услов $CK = I$ ако је ранг матрице *C*: $rang(C) = p$. Ово повлачи за собом да је $C\hat{x}(k|k) = y(k)$, тј. да се излази система естимирају без грешке. На тај начин је могуће елиминисати p једначина из (2.25), чиме се снижава ред опсервера. Опсервере код којих је снижен ред називамо редукованим опсерверима или Луенбергеровим опсерверима [46].

2.2.1 Анализа система са затвореном спрегом

На слици 2.1. је приказан блок дијаграм система са регулатором који је добијен комбиновањем повратне спреге по стању и опсервера. Користећи се претходним излагањима за систем (2.20) и узевши у обзир израз (2.23): $\tilde{x} = x - \hat{x}$, јасно је да у случају немерљивости свих стања, користимо закон управљања:

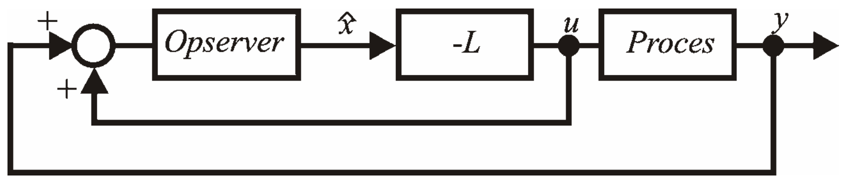
$$u(k) = -L\hat{x}(k|k-1), \tag{2.27}$$

где се до $\hat{x}$ долази преко опсервера:

$$\hat{x}(k+1 \mid k) = \Phi\hat{x}(k \mid k-1) + \Gamma u(k) + K[y(k) - C\hat{x}(k \mid k-1)]. \tag{2.28}$$

Користећи се претходним изразима, систем са затвореном спрегом је могуће опсати следећим једначинама:

$$\begin{cases} x(k+1) = [\Phi - \Gamma L]x(k) + \Gamma L\tilde{x}(k|k-1) \\ \tilde{x}(k+1|k) = [\Phi - KC]\tilde{x}(k|k-1) \end{cases}. \tag{2.29}$$



Слика 2.1. Блок дијаграм система са регулатором

Систем са затвореном спрегом је реда $2n$. Решења карактеристичне једначине система са затвореном спрегом су решења карактеристичних једначина матрица $\Phi - \Gamma L$ и $\Phi - KC$. Приметимо да су решења карактеристичне једначине матрице $\Phi - \Gamma L$ жељени полови који су дати са (2.7), док су решења карактеристичне једначине матрице $\Phi - KC$ жељени полови опсервера.

2.2.2 Избор матрице *K* у опсерверу

Преостало је да опишемо избор матрице *K* тако да систем (2.24) буде стабилан. Наиме, за дате матрице Φ и *C* потребно је наћи матрицу *K* тако да матрица $\Phi - CK$ има унапред одређена решења карактеристичне једначине. Из досадашње дискусије је јасно да је реч о истом математичком проблему као што је проблем налажења матрице L код методе подешавања полова за систем у простору стања. Стога и овде важи: уколико је систем (2.20) поптуно опсервабилан могуће је наћи матрицу К такву да опсервер (2.24) има карактеристични полином $P(z)$ дефинисан са (2.7). Такође, и са практичног аспекта наведени проблеми су уско повезани; одређивање полова опсервера је компромис између осетљивости на грешке у мерењу и брзине естимације у случају поремећаја типа почетних услова. Наиме, са гледишта квалитета процене у условима дејства већих поремећаја типа почетних услова, фактори појачања у матрици *K* треба да буду велики, да би процењена стања што брже конвергирала својим стварним вредностима. Таквим избором полови опсервера ће се приближавати координатном почетку ***z*** равни, при чему опсервер поприма изразито диференцијална својства. Пошто шумови припадају подручју високих учестаности, такав опсервер ће знатно више појачавати шум мерења него саму мерену величину, па ће јасно квалитет процене бити низак. Закључујемо да у условима дејства већих поремећаја на објекат управљања добро је да су полови опсервера што ближе координатном почетку, док са становишта смањења утицаја мерног шума на квалитет процене, добро је да полови буду ближе јединичном кругу. Ова два опречна захтева се могу помирити тако што ћемо се користити једним практичним упутством: спектар полова опсервера треба бирати тако да брзина ишчезавања грешке процене буде два до четири пута већа од брзине ишчезавања прелазног процеса у пројектованом систему са затвореном повратном спрегом [45]. У ствари, у реалним условима избор полова опсервера треба вршити експериментално: структуру система са опсервером треба симулирати са очекиваним поремећајима и мерним шумом, и извршити подешавање матрице *K* све док се не постигне жељени квалитет процене.

3 МЕТОДА ПОДЕШАВАЊА ПОЛОВА ЗА СИСТЕМ ДАТ СА ФУНКЦИЈОМ ПРЕНОСА

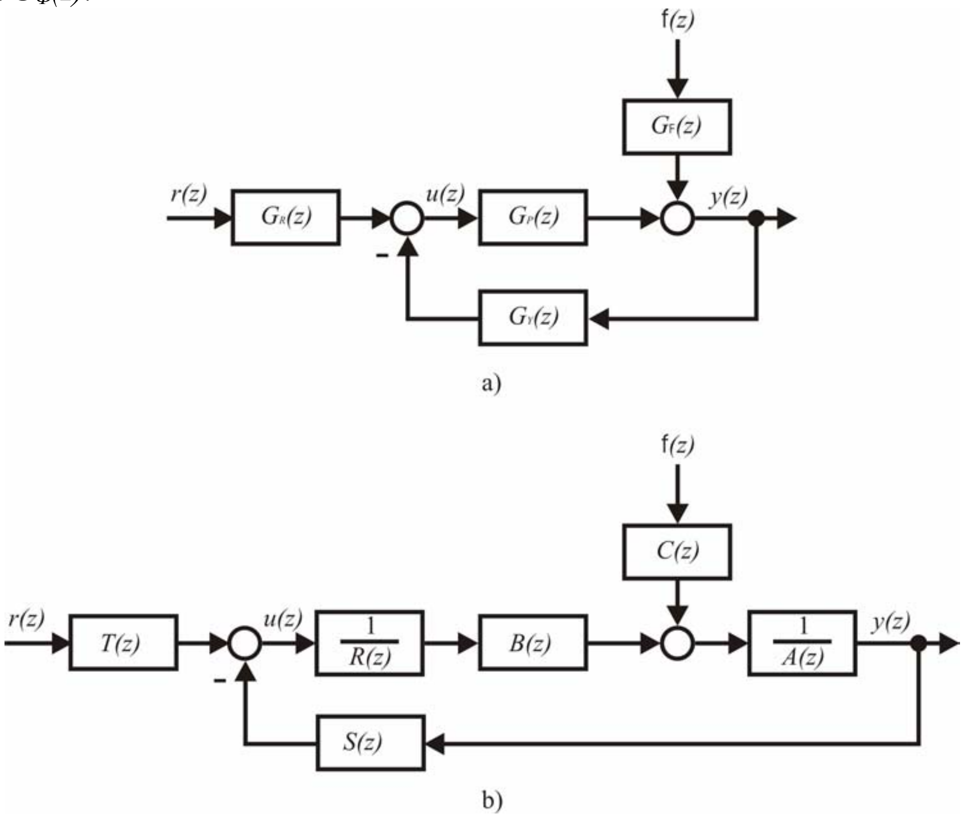
У претходном поглављу укратко је описана метода подешавања полова за систем у простору стања. Показано је да уколико је систем потпуно контролабилан по стању, онда се полови система могу поставити на било ком (жељеном) месту у *z*–равни користећи се адекватном повратном спрегом са појачањима, по променљивама стања. Уколико неке од променљивих у простору стања нису директно мерљиве, користе се вредности чија се процена врши у опсерверу.

Осим приступа пројектовању регулатора методом подешавања полова у простору стања, сличан дизајн система можемо извршити и уколико је систем задат са функцијом дискретног преноса. Овај приступ у пројектовању се у често назива и приступом са полиномијалним једначинама. Како је овај приступ погодан за пројектовање регулатора за серво системе његово детаљно разматрање биће извршено у овом поглављу.

У наставку ће бити формулисана уопштена структура дигиталног система управљања и задатак пројектовања регулатора методом подешавања полова. Биће размотрен проблем математичког решења линеарне једначине са полиномима, да би се потом размотрила конкретна процедура пројектовања регулатора методом подешавања полова и прорачун степена полинома да би се обезбедила каузалност овог закона управљања. Потом ће се дати осврт на испитивање стабилности система са полиномијалним регулатором и испитати његова осетљивост на поремећаје. Затим ће бити предложене методе за оптимално одбацивање поремећаја и грешака кроз принцип унутрашњег модела поремећаја, који се може укључити у процедуру подешавања полова полиномијалним једначинама. На крају овог поглавља сагледаће се практични аспекти у методи подешавања полова као што су: избор периоде одабирања, избор жељене функције преноса система са затвореном повратном спрегом и проблем ограничења амплитуде сигнала управљања, и извршити упоређивање методе подешавања полова у односу на друге методе (метода ГМК, Смитов предиктор, регулација са праћењем модела и Дахлин-Хајамов алгоритам).

3.1 Структура система

На слици 3.1.а. дата је уопштена структура дигиталног система управљања кога сачињавају: функције преноса регулатора у директној грани $G_R(z)$ и у повратној грани $G_Y(z)$, функција преноса процеса (система који је објект регулације) $G_P(z)$ и функција преноса поремећаја $G_\Phi(z)$.



Слика 3.1. Структура дигиталног система управљања: (а) уопштена струкура ДСУ и (б) канонична уопштена структура ДСУ

На слици 3.1.(б) дата је канонична репрезентација система са слике 3.1.(а), што значи да је сваки елемент у блок дијаграму представљен са по једним полиномом. Сваки од ових полинома је јединствен и појављује се само у једном блоку. Веза између датих полинома са слике 3.1.(б) и функција преноса са слике 3.1.(а) је следећа:

$$
\begin{aligned}
G_R(z) &= \frac{T(z)}{R(z)}, \\
G_Y(z) &= \frac{S(z)}{R(z)}, \\
G_P(z) &= \frac{B(z)}{A(z)}, \\
G_\Phi(z) &= \frac{C(z)}{A(z)}.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Претпоставља се да процес има један улаз u и један мерљив излаз y. Однос између улаза и излаза је дат са функцијом дискретног преноса $G_P(z)$ и претставља динамику процеса, укључујући и коло задршке нултог реда (D/A конвертор), актуатор, сензор излаза са A/D конверзијом и antialiasing филтар. Претпоставља се такође да је функција дискретног преноса $G_P(z)$ дата у тзв. минималној реализацији, тј. да полиноми $A(z)$ и $B(z)$ **немају заједничких чиниоца**. Слично, претпоставља се и да је функција дискретног преноса поремећаја $G_\Phi(z)$ такође дата у минималној реализацији. Ове претпоставке не уносе никаква ограничења у даљем поступку будући да је сваку функцију дискретног преноса могуће свести на њену минималну реализацију.

Регулатор датог система дат је са једним излазом u, и два улаза, командни сигнал тј. референца r и измерена вредност излаза y. Општа структура линеарног регулатора за овај случај дата је следећим изразом:

$$R(z)u(z) = T(z)r(z) - S(z)y(z)\,. \tag{3.2}$$

Претпоставља се да је коефицијент уз највећи степен полинома R једнак јединици (да је полином R тзв. моник).

<u>I Услов каузалности</u>

Имајући у виду изразе за функције дискретног преноса регулатора $G_R(z)$ и $G_Y(z)$, у изразима (3.1), јасно је да се каузалност закона управљања (3.2) обезбеђује уколико су испуњени следећи услови:

$$\deg R \geq \deg T\,, \tag{3.3}$$

$$\deg R \geq \deg S\,. \tag{3.4}$$

3.2 Задатак пројектовања регулатора методом подешавања полова

Задатак пројектовања регулатора методом подешавања полова полиномијалним приступом се може дефинисати на следећи начин: За дати модел процеса и поремећаја који су дефинисани са функцијама дискретног преноса $G_P(z)$ и $G_\Phi(z)$ респективно, потребно је пројектовати дигитални закон управљања који је дат са изразом (3.2), тако да систем у затвореној спрези резултује са функцијом дискретног преноса која даје жељени одзив на дату побуду, тј. да систем у затвореној спрези буде описан са неком унапред специфицираном и жељеном функцијом дискретног преноса:

$$G_M(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}\,, \tag{3.5}$$

при чему је ова функција преноса дата у минималној реализацији.

На основу слике 3.1.(б) и израза (3.1) и (3.2), може се извести функција преноса система са затвореном повратном спрегом:

$$\left[A(z)\cdot R(z) + B(z)\cdot S(z)\right]\cdot y(z) = B(z)\cdot T(z)\cdot r(z)\,. \tag{3.6}$$

Како је потребно да дата функција преноса буде једнака функцији дискретног преноса датој са (3.5), може се написати једнакост:

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}\,. \tag{3.7}$$

Дакле, проблем пројектовања дигиталног закона управљања се своди на проблем налажења полинома $R(z)$, $S(z)$ и $T(z)$ који задовољавају једнакост дефинисану изразом (3.7), односно задовољавају следеће изразе:

$$B(z)T(z) = B_m(z)\,. \tag{3.8}$$

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)\,. \tag{3.9}$$

Осим наведених израза, потребно је да полиноми *R(z), S(z)* и *T(z)* задовоље захтеве у погледу стабилности, као и да испуне и друге циљеве тако да систем у затвореној спрези поприми жељене одлике и испуни задате циљеве у погледу перформанси као што су: што већи пропусни опсег, неосетљивост на поремећаје и шум мерења, стабилност и робусност за што веће варијације параметара који описују процес, одређена природа и изглед командног сигнала и друге, а о којима ће бити речи у наставку овог поглавља

<u>II Услов каузалности</u>

Имајући у виду изразе за функције дискретног преноса процеса $G_P(z)$ (3.1) и жељене функције преноса $G_M(z)$ (3.5), јасно је да се каузалност закона управљања (3.2) обезбеђује уколико кашњење у моделу тј. жељеној функцији преноса веће или једнако кашњењу у процесу:

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B\,. \tag{3.10}$$

3.3 Проблем математичког решења линеарне једначине са полиномима, облика *AX+BY=C*

Дискусија у одељку **3.2** нас упућује да је потребно одредити два полинома *X* и *Y* који задовољавају линеарну полиномијалну једначину,

$$A \cdot X + B \cdot Y = C\,, \tag{3.11}$$

где су *A, B,* и *C* познати полиноми. Оваква класа једначина позната је под именом Диофантова једначина, по грчком математичару Диофанту из Александрије (Diophantus 246?-330? н.е.) који је познат као утемељивач алгебре. Његово дело “Аритметика” у 13 књига представља колекцију од око 260 обрађених проблема са решењима. Историјска важност овог дела је велика и двојака: реч је о првом познатом раду у коме је употребљена модерна алгебра, и раду који је подстакао поновно “рођење” теорије бројева [47]. Иначе, под Диофантовим једначинама се подразумевају не само линеарне једначине облика (3.11), већ и сличне једначине виших степена, при чему је за све једначине заједничко да су једино целобројна решења дозвољена. Једна од често разматраних Диофантових једначина је и једначина облика $x^n + y^n = z^n$, која се спомиње у познатој Фермаовој последњој теореми (Pierre de Fermat – 1601.-1665. год.) која каже да не постоје позитивне целобројне вредности за *x, y* и *z* такве да представљају решење једначине $x^n + y^n = z^n$ при чему је *n*>2 [48]. Ова теорема је доказана тек 1996. године, а њен доказ је на преко 120 страна извео професор Andrew J. Wiles.

Поред назива Диофантова једначина, израз (3.11) се среће и под именом Арабиатин (Aryabhatta) индетитет, а када је $C = q^m$ израз (3.11) се назива Безуовим (Bezout) идентитетом.

3.3.1 Решење Диофантове једначине Еуклидовим алгоритмом

Вратимо се проблему решавања линеарне Диофантове једначине, уз напомену да ће се прво разматотрити ова класа једначина са целим бројевима, а потом са полиномима. Зато истражимо проблем налажења целобројних решења за линеарну Диофантову једначину:

$$a \cdot x + b \cdot y = c\,, \tag{3.12}$$

за било које $a, b, c \in Z$. Наредна теорема је важна претпоставка (лема) за доказивање теореме 3.2.

Лема 3.1: Ако се c садржи у проузводу ab тј. $c \mid ab$ и ако је највећи заједнички делилац b и c, 1, тј. $(b, c) = 1$ тада се c садржи у a тј. $c \mid a$.

Доказ: Како је $(b, c) = 1$, тада постоје цели бројеви x и y такви да је $bx+cy = 1$. Множењем претходног израза са a, добијамо $abx + acy = a$. Јасно је да се c садржи у левој страни добијеног израза, па се стога c садржи у a.

Теорема 3.2: Ако је $(a, b) = 1$ и ако је c било који цео број, тада једначина $ax+by = c$ има решења $x = x_0$ и $y = y_0$. Надаље, уколико једначина има решења, тада постоји бесконачно много решења, која су дата са изразима:

$$x = x_0 + b \cdot t,$$
$$y = y_0 - a \cdot t,$$

за све целобројне вредности t.

Доказ: Како је $(a, b) = 1$, постоје цели бројеви x_1 и y_1 такви да је $ax_1+by_1 = 1$. Тада $x_0 = cx_1$ и $y_0 = cy_1$ су решења једначине $ax+by = c$, јер је:

$$a(cx_1) + b(cy_1) = c \cdot 1.$$

Нека су x' и y' такође решења једначине $ax+by = c$. Тада имамо:

$$ax' + by' = c,$$
$$ax_0 + by_0 = c.$$

Одузимањем горње две једначине, долазимо до следећих израза:

$$a(x' - x_0) + b(y' - y_0) = 0,$$
$$a(x' - x_0) = -b(y' - y_0).$$

Пошто је $b \neq 0$ јер је $(a, b) = 1$, следи да је $b \mid x' - x_0$ и стога је $x' - x_0 = bt$ за неко $t \in Z$, тј. $x' = x_0 + bt$. Заменом bt уместо $x' - x_0$ добијамо:

$$abt = -b(y' - y_0).$$

Дељењем једначине са b добијамо да је $y' = y_0 - at$. Дакле, решења $x = x_0 + b \cdot t$, $y = y_0 - a \cdot t$, задовољавају једначину $ax+by = c$, за све целобројне вредности t.

Уопштено, ако је $(a, b) = g$ тада једначина $ax+by = c$, има решења ако и само ако $g \mid c$. Уколико је $g \mid c$ тада је јасно да једначине:

$$ax + by = c,$$
$$\frac{a}{g}x + \frac{b}{g}y = \frac{c}{g},$$

имају иста решења, тако да теорема покрива уопштену ситуацију, будући да се g може скратити.

Размотримо сада један од често примењиваних начина решавања Диофантове једначине (3.12) које је први предложио Brahmagupta [48], Еуклидов алгоритам. Реч је о алгоритму који се заснива на тражењу највећег заједничког делиоца два броја. Применимо овај алгоритам на налажење највећег заједничког делиоца два цела броја a и b. Под претпоставком да је апсолутна вредност броја a већа од апсолутне вредности броја b тада се може написати следећа једнакост:

$$a = b \cdot q + r . \tag{3.13}$$

Ако је број u највећи заједнички делилац бројева a и b тада је он истовремено и делилац броја r што тврдимо на основу следеће једнакости:

$$r = a - b \cdot q = s \cdot u - t \cdot u \cdot q = (s - t \cdot q) \cdot u . \tag{3.14}$$

Пошто је сваки заједнички делилац бројева a и b, делилац бројева b и r, тада се за налажење највећег заједничког делиоца бројева a и b може применити следећа процедура:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \quad a = b \cdot q_1 + r_1 \quad r_1 = a - b \cdot q_1, \tag{3.15}$$

где је $\lfloor x \rfloor$ највећи цео број мањи или једнак реалном броју x,

$$\begin{gathered}
q_2 = \left\lfloor \frac{b}{r_1} \right\rfloor \quad b = q_2 \cdot r_1 + r_2 \quad r_2 = b - q_2 \cdot r_1, \\
q_3 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor \quad r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3 \quad r_3 = r_1 - q_3 \cdot r_2, \\
\vdots \\
q_n = \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor \quad r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n \quad r_n = r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-1}, \\
q_{n+1} = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor \quad r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0 \quad r_n = \frac{r_{n-1}}{q_{n+1}}.
\end{gathered} \tag{3.16}$$

Након егзактног дељења бројева у последњој једначини израза (3.16) закључује се да је највећи заједнички делилац бројева a и b, број u=r_n.

Еуклидов алгоритам је сада једноставно применити на решавање Диофантове једначине (3.12). Претходно је потребно решити једначину:

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 1 , \tag{3.17}$$

док се до решења једначине (3.12) долази на основу следеће једначине:

$$x = x_0 \cdot c \text{, и } y = y_0 \cdot c . \tag{3.18}$$

Да би се решила Диофантова једначина (3.17) искористиће се варијација Еуклидовог алгоритма. Нека су $a = r_1$ и $b = r_2$. Сада можемо писати:

$$\begin{aligned} r_1 &= q_1 \cdot r_2 + r_3 \\ r_2 &= q_2 \cdot r_3 + r_4 \\ &\vdots \\ r_{n-3} &= q_{n-3} \cdot r_{n-2} + r_{n-1} \\ r_{n-2} &= q_{n-2} \cdot r_{n-1} + 1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Полазећи од последње једначине у (3.19) може се написати следећа једнакост:

$$1 = r_{n-2} - q_{n-2} \cdot r_{n-1}, \tag{3.20}$$

а потом и

$$r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-3} \cdot r_{n-2}. \tag{3.21}$$

Заменом (3.21) у (3.20), долази се до следећег израза:

$$1 = -q_{n-2} \cdot r_{n-3} + (1 - q_{n-2} \cdot q_{n-3}) \cdot r_{n-2}. \tag{3.22}$$

Настављањем дате процедуре долази се до прве једначине у (3.19), што доводи до решења једначине при чему се добијају решења једначине (3.17).

Сада се можемо посветити проблему решавања линеарне Диофантове једначине облика (3.11), тј. једначине са полиномима. Закључци који су донесени у претходно наведеним разматрањима линеарне Диофантове једначине са целим бројевим се могу применити и на такав облик једначине са полиномима, будући да цели бројеви и полиноми са реалним коефицијентима имају исте алгебарске особине и за њих важе иста алгебарска правила (полиноми формирају **прстен**):

- Сабирање, односно множење полинома (целих бројева) резултује другим полиномом (целим бројем)
- Дељење полинома (целих бројева) не резултује увек са полиномом (целим бројем).

На основу претходног разматрања, можемо на основу теореме **3.2** да поставимо сличну теорему за случај Диофантове једначине са полиномима, коју ћемо навести без доказивања:

Теорема 3.3: Нека су *A, B* и *C* полиноми са реалним коефицијенима. Ако се највећи заједнички делилац полинома *A* и *B* садржи у полиному *C*, тада једначина $A \cdot X + B \cdot Y = C$ има решења $X = X_0$ и $Y = Y_0$. Надаље, уколико једначина има решења, тада постоји бесконачно много решења, која су дата са изразима:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + B \cdot Q, \\ Y &= Y_0 - A \cdot Q, \end{aligned} \tag{3.23}$$

где је *Q* произвољан полином са реалним коефицијентима.

Последица теореме 3.3: Постоје јединствена решења једначине $A \cdot X + B \cdot Y = C$ таква да је:

$$\deg X < \deg B, \tag{3.24}$$

или,

$$\deg Y < \deg A. \tag{3.25}$$

Размотримо сада неке од начина решавања Диофантове једначине (3.11). Као што је већ наглашено, и у случају Диофантове једначине са полиномима, може се применити Еуклидов алгоритам.

Применимо Еуклидов алгоритам на полиномну једначину (3.11). Нека су $R_1(z)=A(z)$ и $R_2(z)=B(z)$. Сада се могу написати следећи изрази:

$$\begin{aligned}
R_1(z) &= Q_1(z)\cdot R_2(z)+R_3(z)\\
R_2(z) &= Q_2(z)\cdot R_3(z)+R_4(z)\\
&\vdots\\
R_{n-2}(z) &= Q_n(z)\cdot R_{n-1}(z)+R_n(z)\\
R_{n-1}(z) &= Q_{n+1}(z)\cdot R_n(z)+R_{n+1}(z)\\
R_{n+1}(z) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

На основу израза (3.26) може се закључити да је највећи заједнички делилац полинома *A(z)* и *B(z)* полином $R_n(z)$. Имајући у виду да полиноми *A(z)* и *B(z)* немају заједничких фактора тада је полином $R_n(z)$, идентички једнак јединици:

$$R_n(z)=1. \tag{3.27}$$

На основу израза (3.26), може се написати следећа једнакост:

$$1=R_n(z)=R_{n-2}(z)-Q_n(z)\cdot R_{n-1}(z), \tag{3.28}$$

а потом и,

$$R_{n-1}(z)=R_{n-3}(z)-Q_{n-1}(z)\cdot R_{n-2}(z). \tag{3.29}$$

Заменом (3.29) у (3.28) долази се до следећег:

$$\begin{aligned}
1 &= -Q_n(z)\cdot R_{n-3}(z)+(1+Q_n(z)\cdot Q_{n-1}(z))\cdot R_{n-2}(z)\\
&= U_{n-3}(z)\cdot R_{n-3}(z)+V_{n-2}(z)\cdot R_{n-2}(z).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Сукцесивном применом једначине (3.30), долази се до крајње једнакости:

$$1=U_1(z)\cdot R_1(z)+V_2(z)\cdot R_2(z)=U_1(z)\cdot A(z)+V_2(z)\cdot B(z), \tag{3.31}$$

на основу које се долази до решење Диофантове једначине са полиномима (3.11):

$$X(z)=U_1(z)\cdot C(z), \tag{3.32}$$

и

$$Y(z)=V_2(z)\cdot C(z). \tag{3.33}$$

3.3.2 Решење Диофантове једначине формирањем Силвестерове матрице

Најчешће примењивано решење при решавању Диофантове једначине са полиномима при пројектовању регулатора методом подешавања полова, је решење које се заснива на поређењу одговарајућих коефицијената у члановима са истим степеном по променљивој *z* односно, решење са формирањем тзв. Силвестерове матрице.

Подсетимо се једначине (3.9), коју је потребно решити:

$$A(z)R(z)+B(z)S(z)=A_c(z). \tag{3.34}$$

У једначини (3.34) ради лакшег записивања смо уместо A_m записали A_c. Полиноми $A(z)$ и $B(z)$ су бројилац и именилац функције дискретног преноса процеса:

$$\frac{y}{u} = \frac{B(z)}{A(z)}, \tag{3.35}$$

$$A(z) = z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0, \tag{3.36}$$

$$B(z) = b_n \cdot z^n + b_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot z + b_0, \tag{3.37}$$

при чему се претпоставља да је систем описан са (3.35) потпуно контролабилан и опсервабилан, тј. да полиноми $A(z)$ и $B(z)$ **немају заједничких чиниоца**.

Полиномну једначину (3.34) можемо записати као систем једначина поређењем одговарајућих коефицијената у члановима са истим степеном по променљивој z:

$$\sum_{i+j=k} a_i r_j + \sum_{i+j=k} b_i s_j = a_{ck}, \quad k = 0, \ldots, m, \tag{3.38}$$

где је $m = \max \deg(AR, BS)$, односно у матричној форми:

$$m+1\left\{ \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_1 & \cdots & \vdots \\ a_{n-1} & \vdots & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ 0 & 1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{\deg R+1} & \underbrace{\begin{matrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b_1 & \cdots & \vdots \\ b_{n-1} & \vdots & \cdots & 0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \\ 0 & b_n & \cdots & b_1 \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{matrix}}_{\deg S+1} \end{bmatrix} \right. \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{p-1} \\ r_p \\ s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{c0} \\ a_{c1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{cm-1} \\ a_{cm} \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

Матрица **S**:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_1 & \cdots & \vdots & \vdots & b_1 & \cdots & \vdots \\ a_{n-1} & \vdots & \cdots & 0 & b_{n-1} & \vdots & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \\ 0 & 1 & \cdots & a_1 & 0 & b_n & \cdots & b_1 \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & a_{n-1} & 0 & \vdots & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}_{[m+1 \times m+1]} \tag{3.40}$$

која се налази са леве стране једначине (3.39) се назива Силвестеровом (Sylvester) матрицом. Ова матрица има особину да је **несингуларна** уколико полиноми $A(z)$ и $B(z)$ немају заједничких чиниоца, што се може доказати развојем детерминанте $|\mathbf{S}|$. Ако се изврши растављање на чиниоце полинома $A(z)$ и $B(z)$ на следећи начин:

$$A(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-\lambda_i), \tag{3.41}$$

и

$$B(z)=b_n\cdot\prod_{i=1}^{n}(z-\mu_i), \tag{3.42}$$

тада се развојем детерминанте добија следећа једнакост:

$$|\mathbf{S}|=(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}\cdot(b_n)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(\lambda_i-\mu_j). \tag{3.43}$$

Детерминанта Силвестрове матрице биће различита од нуле ако је задовољена следећа неједнакост:

$$\lambda_i-\mu_j\neq 0,\quad \forall(i,j)\in[1,n], \tag{3.44}$$

што је тачно уколико полиноми $A(z)$ и $B(z)$ немају заједничких чиниоца, чиме је претходно наведено тврђење доказано.

У једначини (3.39) дефинисана је матрица непознатих коефицијената уз полиноме $R(z)$ и $S(z)$ као матрица **RS**:

$$\mathbf{RS}=\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{p-1} & r_p & s_0 & s_1 & \cdots & s_{l-1} & s_l\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{m+1\times 1} \tag{3.45}$$

До коефицијената уз полиноме $R(z)$ и $S(z)$ се може доћи решавањем једначине:

$$\mathbf{RS}=\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{A}_c \tag{3.46}$$

Једначина (3.46) је решива уколико је Силвестерова матрица **S** инвертибилна, тј. ако је реч о квадратној матрици (систем једначина (3.38) има број независних једначина једнак броју променљивих), на основу чега можемо записати услов:

$$m+1=\deg R+\deg S+2\,. \tag{3.47}$$

Како је $m=\max\deg(AR,BS)$ за вредност m постоје две могућности: $m=\deg AR$ и $m=\deg BS$. Нека је $m=\deg AR$. Тада је, имајући у виду (3.47):

$$\begin{aligned}\deg AR+1&=\deg R+\deg S+2,\\ \deg A+\deg R+1&=\deg R+\deg S+2,\end{aligned}$$

а одавде је:

$$\deg S=\deg A-1\,. \tag{3.48}$$

Даље на основу (3.34) је:

$$\begin{aligned}\deg(AR+BS)&=\deg A_c,\\ \deg AR&=\deg(A_c-BS)=\max\deg(A_c,BS),\end{aligned}$$

што имајући у виду (3.48) по одузимању $\deg A$ резултује са:

$$\deg R=\max(\deg A_c-\deg A,\deg B-1). \tag{3.49}$$

Зато је једно решење дато са:

$$\begin{cases} \deg S = \deg A - 1, \\ \deg R = \max(\deg A_c - \deg A, \deg B - 1). \end{cases} \tag{3.50}$$

Када је $m = \deg BS$, има се слично разматрање које резултује са:

$$\begin{cases} \deg R = \deg B - 1, \\ \deg S = \max(\deg A_c - \deg B, \deg A - 1). \end{cases} \tag{3.51}$$

Наведена решења (3.50) и (3.51) се поклапају уколико је испуњен услов:

$$\deg A_c \leq \deg A + \deg B - 1. \tag{3.52}$$

Како је избор A_c слободан, услов (3.52) се увек може задовољити, што резултује са следећим избором степена полинома:

$$\begin{cases} \deg A_c \leq \deg A + \deg B - 1, \\ \deg R = \deg B - 1, \\ \deg S = \deg A - 1. \end{cases} \tag{3.53}$$

што је у складу са **последицом Теореме 3.3**.

3.4 Процедура пројектовања регулатора методом подешавања полова – скраћивање полова и нула

Подсетимо се задатка пројектовања дигиталног закона управљања методом подешавања полова: потребно је наћи полиноме *R(z), S(z)* и *T(z)* који задовољавају једнакост дефинисану изразом (3.7):

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}, \tag{3.7}$$

односно задовољавају следеће изразе:

$$B(z)T(z) = B_m(z). \tag{3.8}$$

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z). \tag{3.9}$$

Из једначине (3.7) следи да су полови система у затвореној спрези решења карактеристичне једначине:

$$A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z) = 0. \tag{3.54}$$

Нуле система са затвореном повратном спрегом су нуле полинома $B(z)$ и $T(z)$. Степен једначине (3.54) је обично већи од степена жељеног карактеристичног полинома $A_m(z)$. Како је потребно задовољити услов (3.9) неопходно је да се са леве стране израза (3.7) одређени полови и нуле међусобно потиру, тј. скраћују.

Размотримо најпре нуле система са отвореном петљом, тј. нуле полинома $B(z)$. Ако нула полинома $B(z)$ није истовремено нула полинома $B_m(z)$, тада она мора бити једно од решења једначине (3.54), односно, та нула се скраћује са полом система у затвореној спрези. Пошто систем са затвореном повратном спрегом мора да буде стабилан, јасно је да се могу скраћивати само стабилне нуле, тј. нуле које леже унутар јединичног круга $\boldsymbol{z}$ равни. Стога полином $B(z)$ се може раставити на чиниоце на следећи начин:

$$B(z) = B^{+}(z) \cdot B^{-}(z), \tag{3.55}$$

где полином $B^{-}(z)$ има све нуле изван јединичног круга, а полином $B^{+}(z)$ све нуле унутар јединичног круга у $\boldsymbol{z}$ равни. Пожељно је због једноставније процедуре израчунавања, полином $B(z)$ раставити на чиниоце тако да коефицијент уз највећи степен полинома $B^{+}(z)$ буде јединица, тј. да полином $B^{+}(z)$ буде моник.

Пошто полином $B^{-}(z)$ не може бити чиниоц израза $A(z)R(z) + B(z)S(z)$, следи да мора бити чиниоц полинома $B_m(z)$, па се овај полином може раставити на чиниоце на следећи начин:

$$B_m(z) = B^{-}(z) \cdot B_m'(z). \tag{3.56}$$

Одавде следи да нестабилне нуле процеса не могу да се измене, па се морају садржати у $B_m(z)$. Пошто се $B^{+}(z)$ садржи у $A(z)R(z) + B(z)S(z)$, следи да се такође садржи у полиному $R(z)$. Стога је:

$$R(z) = B^{+}(z) \cdot R'(z), \tag{3.57}$$

па се једначина (2.33) тада може преписати као:

$$\frac{B^{+}(z) \cdot B^{-}(z) \cdot T(z)}{B^{+}(z) \cdot [A(z) \cdot R'(z) + B^{-}(z) \cdot S(z)]} = \frac{B^{-}(z) \cdot B_m'(z)}{A_m(z)}. \tag{3.58}$$

Размотримо сада полове система са отвореном петљом, тј. нуле полинома $A(z)$. Понекад је упутно скратити неке од стабилних полова процеса, тј. неке од нула полинома $A(z)$, које леже унутар јединичног круга у $\boldsymbol{z}$ равни. Слично претходном разматрању, полином $A(z)$ се може раставити на чиниоце на следећи начин:

$$A(z) = A^{+}(z) \cdot A^{-}(z), \tag{3.59}$$

где је полином $A^{-}(z)$ полином полова који се не желе скратити као и полова који нису стабилни (полови изван јединичног круга), а $A^{+}(z)$ полином полова који се желе скратити.

Пошто је потребно скратити полином $A^{+}(z)$ он мора бити чиниоц полинома $T(z)$, па се овај полином може раставити на чиниоце на следећи начин:

$$T(z) = A^{+}(z) \cdot T'(z). \tag{3.60}$$

Пошто се $A^{+}(z)$ мора садржати у $A(z)R(z) + B(z)S(z)$, следи да се овај полином садржи у полиному $S(z)$. Стога је:

$$S(z) = A^{+}(z) \cdot S'(z), \tag{3.61}$$

па се једначина (3.58) сада може преписати као:

$$\frac{B^{+}(z) \cdot B^{-}(z) \cdot A^{+}(z) \cdot T'(z)}{A^{+}(z) \cdot B^{+}(z) \cdot [A^{-}(z) \cdot R'(z) + B^{-}(z) \cdot S'(z)]} = \frac{B^{-}(z) \cdot B_m'(z)}{A_m(z)}, \tag{3.62}$$

што после сређивања резултује са:

$$\frac{T'(z)}{A^{-}(z)\cdot R'(z)+B^{-}(z)\cdot S'(z)}=\frac{B'_m(z)}{A_m(z)}. \tag{3.63}$$

Понекад је потребно у регулатору увести и неки слободно изабрани полином $A'_o(z)$ којим се могу модификовати неке од карактеристика регулатора. Тада ће се овај полином садржати и у бројиоцу и имениоцу функције преноса од референце до излаза, тако да функција преноса од референце до излаза остане непромењена. Дакле, полином $A'_o(z)$ ће се садржати у $A(z)R(z)+B(z)S(z)$ и у полиному $T(z)$. На основу претходног разматрања и једначина (3.62) и (3.63) можемо написати следеће врло битне релације, које нам дају решење за проблем подешавања полова:

$$A^{-}(z)\cdot R'(z)+B^{-}(z)\cdot S'(z)=A_m(z)\cdot A'_o(z), \tag{3.64}$$

$$T'(z)=B'_m(z)\cdot A'_o(z). \tag{3.65}$$

односно,

$$A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)=A_m(z)\cdot A'_o(z)\cdot B^{+}(z)\cdot A^{+}(z), \tag{3.66}$$

$$T(z)=B'_m(z)\cdot A'_o(z)\cdot A^{+}(z). \tag{3.67}$$

Осим увођења слободно изабраног полинома $A'_o(z)$, понекад се неки захтеви и карактеристике регулатора могу постићи специфичним обликом полинома $R(z)$ и $S(z)$, односно укључивањем неких унапред изабраних чинилаца $R_f(z)$ и $S_f(z)$, у наведене полиноме, што се може записати следећим условима:

$$R(z)=R_f(z)\cdot R''(z), \tag{3.68}$$

$$S(z)=S_f(z)\cdot S''(z). \tag{3.69}$$

До решења проблема подешавања полова када је потребно увести унапред изабране факторе $R_f(z)$ и $S_f(z)$, се лако долази укључивањем ових фактора у бројилац и именилац функције преноса процеса, при решавању полиномијалних једначина (3.66) и (3.67). Дакле, нека су:

$$A'(z)=R_f(z)\cdot A(z), \tag{3.70}$$

$$B'(z)=S_f(z)\cdot B(z). \tag{3.71}$$

Сада је потребно решити следеће полиномијалне једначине:

$$\begin{cases} A'(z)\cdot R''(z)+B'(z)\cdot S''(z)=A_m(z)\cdot A'_o(z)\cdot B^{+}(z)\cdot A^{+}(z), \\ T(z)=B'_m(z)\cdot A'_o(z)\cdot A^{+}(z). \end{cases}, \tag{3.72}$$

а потом наћи полиноме $R(z)$ и $S(z)$, решавањем једначина (3.68) и (3.69):

$$R(z)=R_f(z)\cdot R''(z), \tag{3.68}$$

$$S(z)=S_f(z)\cdot S''(z). \tag{3.69}$$

Разлози увођења слободно изабраног полинома $A_o'(z)$ и унапред изабраних фактора $R_f(z)$ и $S_f(z)$ биће детаљније изложени у одељцима **3.7.** и **3.8.**.

3.4.1 Тумачење полова система са затвореном спрегом

Карактеристични полином система са затвореном повратном спрегом дат је са изразом: $B^+(z)A^+(z)A_o'(z)A_m(z)$. У случају да не желимо да скратимо ниједан од стабилних полова процеса, тада за полином $A^+(z)$ важи $A^+(z)=1$. Карактеристични полином система са затвореном повратном спрегом ће тада бити: $B^+(z)A_o'(z)A_m(z)$. Уколико упоредимо решење које се добија за метод подешавања полова полиномијалним приступом и решење које смо добили у одељку 2.2.1. за систем у простору стања са повратном спрегом по стањима и опсервером, долазимо до следећих релација:

$$A_m(z)=\det(zI-\Phi+\Gamma L), \tag{3.70}$$

и,

$$A_o'(z)=\det(zI-\Phi+KC). \tag{3.71}$$

Са ове тачке гледишта природно је полином $A_o'(z)$ назвати полиномом опсервера. Такође смо нагласили да се полином $A_o'(z)$ садржи у $A(z)R(z)+B(z)S(z)$ и у полиному $T(z)$, што у светлу тумачења полинома $A_o'(z)$ као полинома опсервера значи да управљачки сигнал не проузрокује грешке опсервера. Ипак при коришћењу приступа са полиномијалним једначинама за подешавање спектра полова потребно је имато мало шире тумачење. Није неопходно разматрати карактеристични полином система са затвореном спрегом као производ два полинома истог степена. Довољно је посматрати $A_o'(z)A_m(z)$ као жељени карактеристични полином система са затвореном спрегом где полином $A_o'(z)$ представља полове који нису побуђени управљачким сигналом. Такође, при скраћивању полова процеса, производ $A^+(z)A_o'(z)=A_o(z)$ губи репрезентацију полинома опсервера. Напоменимо да смо адекватним избором полинома $A_o(z)$ у могућности да обликујемо различите одзиве система на промену референце и на поремећаје, што ће детаљније бити дискутовано у одељцима **3.7.** и **3.8.**.

3.5 КАУЗАЛНОСТ И ПРОРАЧУН СТЕПЕНА ПОЛИНОМА

Размотримо сада питања везана за каузалност и прорачун степена полинома за метод подешавања спектра полова полиномијалним приступом. У ток циљу подсетимо се **I** и **II услова каузалности**, тј. израза (3.3), (3.4) и израза (3.10) везаних за каузалност дигиталног закона управљања (3.2):

$$\deg R \geq \deg T, \tag{3.3}$$

$$\deg R \geq \deg S. \tag{3.4}$$

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B. \tag{3.10}$$

На основу претходних разматрања ради краткоће излагања, можемо дефинисати следеће полиноме:

$$A^{+}(z)A_o'(z) = A_o(z), \tag{3.72}$$

$$A_m(z)A_o(z) = A_c(z). \tag{3.73}$$

Такође подсетимо се закључака везаних за избор степена полинома у складу са последицом Теореме 3.3., донетих у одељку 3.3., релација (3.53):

$$\begin{cases} \deg A_c \le \deg A + \deg B - 1, \\ \deg R = \deg B - 1, \\ \deg S = \deg A - 1. \end{cases} \tag{3.53}$$

Доказаћемо сада да постоји каузално решење при пројектовању дигиталног закона управљања методом подешавања полова са полиномијалним приступом, уколико су испуњене релације (3.10) и релација:

$$\deg A_o \ge 2\deg A - \deg A_m - \deg B^{+} - 1. \tag{3.74}$$

Доказ:

На основу једначина (3.66) и (3.72) може се писати:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = B^{+}(z)A_o(z)A_m(z). \tag{3.75}$$

Како је $\deg B < \deg A$ и имајући у виду релацију (3.4): $\deg S \le \deg R$, следи да је:

$$\deg AR = \deg\big(AR + BS\big) = \deg B^{+}A_oA_m. \tag{3.76}$$

Одавде је:

$$\deg R = \deg A_o + \deg A_m + \deg B^{+} - \deg A. \tag{3.77}$$

Из једначина (3.72) се може одредити степен полинома $T(z)$ као:

$$\deg T = \deg A_o + \deg B_m'. \tag{3.78}$$

Имајући у виду неједнакост (3.3), можемо писати следећу релацију:

$$\deg A_o + \deg A_m + \deg B^{+} - \deg A \ge \deg A_o + \deg B_m'. \tag{3.79}$$

Сређивањем израза (3.79) добија се:

$$\deg A_m - \deg B_m' \ge \deg A - \deg B^{+}. \tag{3.80}$$

Одузимањем $\deg B^{-}$ од обе стране неједначине, и имајући у виду израз (3.56), долази се до израза (3.10).

Даље, избором степена полинома $S(z)$ у складу са (3.53), уз (3.4), долази се до израза:

$$\deg A_o + \deg A_m + \deg B^{+} - \deg A \ge \deg A - 1. \tag{3.81}$$

Сређивањем израза (3.81) долази се до израза (3.74).

Као што смо већ нагласили, изрази (3.3) и (3.4) обезбеђују каузалност функција преноса регулатора. Уколико је време прорачуна управљачког сигнала мали део периоде одабирања, природно је захтевати:

$$\deg R = \deg S = \deg T. \tag{3.82}$$

Са друге стране, за време прорачуна управљачког сигнала блиском трајању периоде одабирања, уместо наведене релације треба узети:

$$\deg R = 1 + \deg S = 1 + \deg T\,, \tag{3.83}$$

што практично значи да постоји кашњење од једне периоде одабирања у дигиталном регулатору.

3.6 СТАБИЛНОСТ СИСТЕМА ПРИ ПОСТОЈАЊУ ГРЕШКЕ У МОДЕЛУ ПРОЦЕСА

У пракси је нереално тврдити да је функција дискретног преноса којом се моделује процес поуздана. Њом се само условно речено довољно поуздано може моделовати процес. Наиме, познато је да је при дискретизацији континуалних система са исувише малом периодом одабирања Никвистово подручје учестаности врло широко, при чему унутар тако великог подручја учестаности може доћи до изражаја немоделирана динамика анализираног реалног система или, кад је реч о дигиталној обради сигнала, повећан утицај суперпонираног шума на вредности одбирака [3]. Из тог разлога је потребно анализирати како грешке у моделовању могу утицати на карактеристике система са затвореном повратном спрегом.

Теорема 3.4: Претпоставимо да је процедура пројектовања дигиталног закона управљања заснована на моделу према изразу (3.1):

$$G_P(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \tag{3.1}$$

док је истинит модел описан са:

$$G_P^o(z) = \frac{B^o(z)}{A^o(z)}. \tag{3.84}$$

Претпоставимо такође да функције преноса $G_P(z)$ и $G_P^o(z)$ имају исти број полова, и да је жељена функција преноса система са затвореном спрегом $G_M(z)$ стабилна. Тада ће структура дигиталног регулатора за систем са затвореном повратном спрегом бити стабилна у односу на $G_P^o(z)$, ако је испуњен следећи услов:

$$\left|G_P(z) - G_P^o(z)\right| < \left|\frac{G_P(z)\cdot T(z)}{G_M(z)\cdot S(z)}\right| = \left|\frac{G_P(z)}{G_M(z)}\right|\cdot\left|\frac{G_R(z)}{G_Y(z)}\right|\,, \tag{3.85}$$

за $|z| = 1$, при чему су према изразима (3.1):

$$G_R(z) = \frac{T(z)}{R(z)}, \tag{3.86}$$

функција преноса регулатора у директној грани (feedforward) и,

$$G_Y(z) = \frac{S(z)}{R(z)}, \tag{3.87}$$

функција преноса регулатора у повратној грани (feedback).

<u>Доказ:</u>

Неједначина (3.85) се изводи на основу резултата опште осетљивости [2]. Како је израз за кружно појачање:

$$G_{LG}(z)=\frac{B(z)\cdot S(z)}{A(z)\cdot R(z)},$$

може се записати:

$$1+G_{LG}(z)=1+\frac{B(z)\cdot S(z)}{A(z)\cdot R(z)}=\frac{B^{+}(z)\cdot A_{o}(z)\cdot A_{m}(z)}{A(z)\cdot R(z)}.$$

Даље, како је на основу разматрања у одељку 3.4.:

$$A_{o}(z)=\frac{T(z)\cdot B^{-}(z)}{B_{m}(z)},$$

важиће:

$$1+G_{LG}(z)=\frac{B^{+}(z)\cdot B^{-}(z)\cdot T(z)\cdot A_{m}(z)}{A(z)\cdot R(z)}=\frac{B(z)\cdot A_{m}(z)\cdot T(z)}{A(z)\cdot B_{m}(z)\cdot R(z)}.$$

Имајући у виду изразе (3.1) и (3.5), може се написати да је:

$$1+G_{LG}(z)=\frac{G_{P}(z)\cdot T(z)}{G_{M}(z)\cdot R(z)}.$$

Ако израз (3.85) помножимо са $\dfrac{S(z)}{R(z)}$, долази се до израза:

$$\left|\frac{S(z)}{R(z)}\cdot G_{P}(z)-\frac{S(z)}{R(z)}\cdot G_{P}^{o}(z)\right|<\left|\frac{G_{P}(z)\cdot T(z)}{G_{M}(z)\cdot R(z)}\right|=\left|1+G_{LG}(z)\right|,$$

односно,

$$\left|G_{LG}(z)-G_{LG}^{o}(z)\right|<\left|1+G_{LG}(z)\right|.$$

До израза (3.85) се надаље долази на основу теореме о стабилности система са затвореном повратном спрегом [2]. Посматрајмо систем са затвореном повратном спрегом $G_{M}(z)$, добијен затварањем негативне повратне спреге излаза процеса описаног функцијом дискретног преноса $G_{P}(z)$ у једном, и $G_{P}^{o}(z)$ у другом случају. Систем добијен затварањем повратне спреге излаза процеса описаног функцијом дискретног преноса $G_{P}^{o}(z)$ је стабилан ако су испуњени следећи услови:

- Да је систем $G_{M}(z)$ је стабилан;
- Да $G_{P}(z)$ и $G_{P}^{o}(z)$ имају исти број полова изван јединичног круга у ***z*** равни, и
- Ако је израз

$$\left|G_{P}^{o}(z)-G_{P}(z)\right|<\left|1+G_{P}(z)\right|, \tag{3.88}$$

  испуњен за $|z|=1$.

Израз (3.88) следи из принципа варијације аргумента на основу ког се изводи закључак да је разлика броја полова и нула изван јединичног круга за $1+G_{P}(z)$ и $1+G_{P}^{o}(z)$ једнака [2].

<u>Закључци који се могу извести на основу Теореме 3.4.:</u>

На основу Теореме 3.4. се може закључити да је веома важно знати број нестабилних полова или нула процеса због правилног пројектовања дигиталног регулатора. Осим тога, израз (3.88) дефинише област учестаности у којој се захтева релативно висока тачност усвојеног модела процеса. Посебно висока тачност моделовања је неопходна управо на учестаностима при којима је $G_P^o(z) \approx -1$, али не и на учестаностима при којима је појачање система велико.

Примена наведене теореме је доста једноставна; по завршетку пројектовања регулатора, десна страна неједначине (3.85) се лако рачуна за $z = e^{j\omega T}$, и не зависи од стварне функције дискретног преноса процеса. Потом се захтеви за прецизношћу модела могу представити у функцији учестаности.

Такође, може се приметити да је неједнакост (3.85) аутоматски задовољена ако су испуњени услови:

$$\left|G_{LG}(z)\right| = \left|\frac{S(z) \cdot B(z)}{R(z) \cdot A(z)}\right| < \frac{1}{3} \ , \tag{3.89}$$

и,

$$\left|G_{LG}^o(z)\right| = \left|\frac{S(z) \cdot B^o(z)}{R(z) \cdot A^o(z)}\right| < \frac{1}{3}. \tag{3.90}$$

Дакле, неједнакост (3.85) је довољно проверити за учестаности при којима је појачање кружне петље веће од $\frac{1}{3}$.

Могуће је дефинисати и релативну тачност моделовања на следећи начин:

$$\frac{\left|G_P(z) - G_P^o(z)\right|}{\left|G_P(z)\right|} \leq \frac{1}{\left|G_M(z)\right|} \cdot \left|\frac{G_R(z)}{G_Y(z)}\right|. \tag{3.91}$$

Неједначина (3.85) поред математичког има јасан и физички смисао. Обично је функција дискретног преноса $G_P(z)$ велика на ниским учестаностима, са тенденцијом опадања на вишим учестаностима. У исто време, жељена функција дискретног преноса система са затвореном повратном спрегом $G_M(z)$, је по правилу на ниским учестаностима једнака јединици. Близу тачке пресека са кривом $G_P(z)$, функција $G_M(z)$ поседује слабо изражен максимум, а са даљим порастом учестаности функција $G_M(z)$ опада. Однос $G_P(z)/G_M(z)$ је релативно лако израчунати користећи се Бодеовим карактеристикама наведених функција преноса. Висока тачност модела је неопходна само у одређеном фреквентном опсегу. На овај начин је могуће сагледати и последице промене жељеног пропусног опсега пројектованог система. Захтеви за тачношћу модела могу бити смањени, смањивањем пропусног опсега система са затвореном повратном спрегом, и супротно, тачност модела мора бити много већа са повећањем пропусног опсега система. Дефинишимо количник између директне и повратне функције дискретног преноса регулатора:

$$\left|\frac{G_R(z)}{G_Y(z)}\right| = \left|\frac{T(z)}{S(z)}\right|.$$

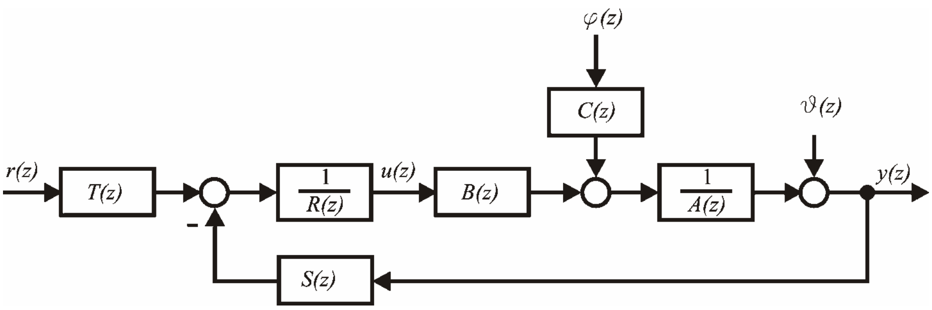
Овај количник је једнак јединици уколико је закон управљања пројектован само по променљивој сигнала грешке. На фреквенцијама на којима је појачање у директној грани веће од појачања у повратној грани, захтеви за тачношћу модела су мањи.

На крају се може закључити и да је тачност апроксимације фунције дискретног преноса система са затвореном повратном спрегом такође условљена грешкама моделовања. Већа тачност се постиже у условима релативно великих вредности функција $G_P(z)$ и $G_P^o(z)$.

3.7 ОСЕТЉИВОСТ СИСТЕМА НА ПОРЕМЕЋАЈЕ

У савременој теорији система аутоматског управљања, присутан је велики број различитих метода за пројектовање регулатора који резултују одређеном структуром регулатора одговором на различите критеријуме и критеријумске функције за синтезу датих регулатора, који се пред њих постављају. Типичан пример критеријума су различити захтеви и норме како у временском тако и у фреквентном домену. У оквиру овог одељка анализираћемо, како се при пројектовању дигиталног регулатора методом подешавања спектра полова, постижу одређени захтеви у погледу робусности.

На слици 3.2. приказан је блок дијаграм система са затвореном повратном спрегом који укључује и дејство поремећаја у виду сигнала $\varphi(z)$ и мерног шума $\vartheta(z)$.



Слика 3.2. Блок дијаграм система са затвореном повратном спрегом.

На основу датог блок дијаграма, узевши да је $r(z) \equiv 0$, могуће је одредити функцију преноса од поремећаја до улаза процеса тј. излаза из дигиталног регулатора:

$$u(z) = -\frac{C(z)\cdot S(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\varphi(z) - \frac{A(z)\cdot S(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\vartheta(z). \tag{3.92}$$

Такође, узевши да је $r(z) \equiv 0$, могуће је одредити и функцију преноса од поремећаја до излаза система, тј. улаза у дигитални регулатор:

$$y(z) = \frac{C(z)\cdot R(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\varphi(z) + \frac{A(z)\cdot R(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\vartheta(z). \tag{3.93}$$

Дефинишимо поједине функције преноса од појединих поремећаја до улаза и излаза:

$$S_{u\varphi}(z) = \frac{u(z)}{\varphi(z)} = -\frac{C(z)\cdot S(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}, \tag{3.94а}$$

$$S_{u\vartheta}(z) = \frac{u(z)}{\vartheta(z)} = -\frac{A(z)\cdot S(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}, \tag{3.94б}$$

$$S_{y\varphi}(z) = \frac{y(z)}{\varphi(z)} = \frac{C(z)\cdot R(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}, \tag{3.94в}$$

$$S_{y\vartheta}(z)=\frac{y(z)}{\vartheta(z)}=\frac{A(z)\cdot R(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}. \tag{3.94г}$$

Наведене функције у изразима (3.94) називаћемо **улазним**, односно **излазним функцијама осетљивости**. Изразе (3.94) можемо приказати у наредној табели:

Табела 3.1. Улазне и излазне функције осетљивости

Поремећај	**Функција осетљивости**	
	Улазна	излазна
$\varphi(z)$	$-\frac{C(z)\cdot S(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}$	$\frac{C(z)\cdot R(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}$
$\vartheta(z)$	$-\frac{A(z)\cdot S(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}$	$\frac{A(z)\cdot R(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}$

Неопходно је нагласити да на овај начин дефинисане функције осетљивости треба разликовати од дефиниције функције осетљивости у класичној теорији система аутоматског управљања. Наиме, да се подсетимо, за једноставан систем аутоматског управљања, при чему је процес описан са:

$$y(z)=P(z)u(z),$$

а регулатор са:

$$u(z)=C(z)\cdot\big(r(z)-y(z)\big),$$

што при затвореној повратној спрези резултује са:

$$y(z)=H(z)u(z)=\frac{C(z)P(z)}{1+C(z)P(z)},$$

дефинише се функција осетљивости као релативно одступање система са затвореном повратном спрегом на варијације у процесу, односно:

$$S=\frac{\log\big(H(z)\big)}{\log\big(P(z)\big)}=\frac{dH(z)/H(z)}{dP(z)/P(z)}=\frac{1}{1+C(z)P(z)}.$$

Нагласимо још и то да неки аутори [2] излазну функцију осетљивости дефинишу од поремећаја до излаза процеса, што би у конкретном случају резултовало са изразом:

$$S_{y\vartheta}(z)=\frac{B(z)\cdot R(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}. \tag{3.94д}$$

Аутору се чини да је оправданије користити израз (3.94г), јер се на тај начин разматра утицај шума на измерену вредност излаза пре увођења у дигитални регулатор, и као што ће се видети у наставку овог одељка, применом адекватних поступака, могуће је тај утицај мерног шума смањити.

Разматрањем израза за улазне и излазне функција осетљивости из табеле 3.1., може се уочити њихова међусобна велика сличност. Разлика се, осим у знаку (улазне функције осетљивости су негативне, док су излазне функције осетљивости позитивне), огледа у присуству полинома $R(z)$ и $S(z)$ у бројиоцима одговарајућих функција осетљивости на дати сигнал поремећаја, односно шума. Са друге стране приметимо да све наведене функције осетљивости имају исти именилац, који је уколико се подсетимо израза (3.75) једнак:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = B^{+}(z)A_o(z)A_m(z). \tag{3.75}$$

На основу досадашњег излагања, јасно је да се могу са неким специфичним решењима за полиноме $R(z)$, $S(z)$ и $A_o(z)$, редуковати утицаји услед поремећаја и мерног шума. Наиме, разматрањем блок дијаграма са слике 3.2. може закључити да грешке мерења у спектру ниских учестаности, могу да пропагирају кроз систем без слабљења, дакле са јединичним појачањем, јер се ове грешке појављују при мерењу излазног сигнала. Преко повратне спреге, оне ће генерисати варијацију излаза процеса. Такође, јасно је да се пренос сигнала може блокирати на одређеним учестаностима, захтевајући да $S\left(e^{j\omega T}\right)$ буде мало на тим учестаностима. Осим тога, може се закључити да се спором променљиви поремећај ефикасно може пригушити на учестаностима на којима је појачање повратне спреге велико односно вредност полинома $R(z)$ мала. Тако, могуће је елиминисати грешку у стационарном стању при константном дејству поремећаја оптерећења, изабравши $R(1)=0$, што је еквивалентно дејству интегралног компензатора.

Имајући у виду претходну дискусију, постаје јасна потреба за тим да полиноми $R(z)$ и $S(z)$ имају унапред дефинисане факторе, као и потреба за увођењем слободно изабраног полинома опсервера $A_o(z)$, чији избор такође утиче на пренос сигнала, будући да су полиноми $R(z)$ и $S(z)$ повезани са полиномом опсервера $A_o(z)$ (имају заједничке чиниоце). При увођењу унапред изабраних фактора у $R(z)$ и $S(z)$, јасно је да се степен полинома опсервера $A_o(z)$ мора увећати.

3.7.1 Обликовање функција осетљивости методом подешавања полова

У теорији робусних система, методе које се користе при синтези робусних регулатора узимају у обзир непоузданост модела у току пројектовања, и за синтезу закона управљања се користе анализом карактеристика система и критеријумима за синтезу у фреквентном домену. На сличан начин, дакле користећи се методама у фреквентном домену, можемо извршити избор подешљивих параметара тј. полова опсервера да би смо извршили обликовање амплитудских и фреквентних карактеристика функција осетљивости, и на тај начин повећали маргине робусности система.

Тако на пример, конструисањем Бодеових карактеристика излазне функције осетљивости, могу се сагледати локални максимуми на одређеним учестаностима. Ти локални максимуми су описани комплексним паром полова који се налазе на датој учестаности. По идентификацији таквог пола односно пара полова, користећи се подешљивим параметрима у функцији осетљивости, те полове можемо померити према центру јединичног круга у z равни. Ово померање полова ће се рефлектовати на амплитудску карактеристику функције осетљивости смањењем датог локалног максимума. На тај начин могуће је обликовати амплитудску карактеристику функције осетљивости за било који критичан пар полова. Досадашња разматрања можемо генерално уобличити усвајањем неких општих критеријума које је потребно испунити при обликовању функција осетљивости.

Дакле, у циљу ограничења поремећаја у спектру нижих учестаности, потребно је амплитудску карактеристику излазних функција осетљивости обликовати тако да појачања на ниским учестаностима буду што мања, док их је на осталим учестаностима потребно ограничити што више. Ово се постиже једним делом кроз обликовање полинома $R(z)$ што ће бити детаљније изложено у наредном поглављу, а једним делом кроз адекватан избор полова полинома $A_o'(z)$. Локалне максимуме могуће је смањити скраћивањем одговарајућег пара коњуговано-комплексних полова у имениоцу функције процеса, односно увођењем филтра непропусника одређене учестаности, тзв. ноч (notch) филтра. Наиме, notch филтар за неку учестаност се добија ако је полином:

$$Q(z) = z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega T) + 1, \tag{3.95}$$

где је ω непропусна учестаност филтра, а T периода одабирања, чинилац полинома $S(z)$. Са друге стране, на основу разматрања у одељку **3.4.**, полином полова који се желе скратити $A^+(z)$ се садржи у полиному $S(z)$ (израз 3.61), па је јасно да дати полином $A^+(z)$ у случају да се жели скратити један пар коњуговано-комплексних полова, уствари представља полином notch филтра за учестаност на којој се налази тај пар коњуговано-комплексних полова.

Слично претходном, у циљу смањења утицаја шума мерења који се налази на вишим учестаностима, појачања амплитудске карактеристике улазних функција осетљивости на тим учестаностима је потребно што више смањити. Ово се такође може постићи померањем полова који кореспондирају са високим учестаностима (чија је фаза ближа π) кроз подешавање полова остатка опсервера, тј. полова полинома $A_o'(z)$.

Нагласимо да овде такође, важе разматрања везана за полове полинома опсервера која су изнета у одељку **2.2.2.**

3.8 ОПТИМАЛНО ОДБАЦИВАЊЕ ПОРЕМЕЋАЈА И ГРЕШАКА

Утицај поремећаја на појаву статичке грешке у излазу, као и појава динамичке грешке када излаз престаје да прати референцу (у иностраној литератури кратко се назива tracking) се могу на адекватан начин предупредити и елиминисати. Оптимално асимптотско одбацивање оваквих поремећаја као и грешака у праћењу референце, се могу једнообразно третирати користећи се тзв. **принципом унутрашњег модела,** скраћено **IMP** (**I**nternal **M**odel **P**rinciple) [49]. Уопштено гледано, приступ се састоји у укључивању модела поремећаја и/или модела самог процеса унутар структуре регулатора у циљу смањења или потпуног елиминисања утицаја немерљивих поремећаја на управљану величину у стационарном стању, као и у циљу повећања робусности система на промене параметара процеса и грешака у његовом моделовању. Велики број радова који се бави овом тематиком се може на основу приступа поделити у две групе: принцип унутрашњег модела – **IMP**, који укључује модел или естиматор спољног поремећаја у структуру регулатора [49]-[51], и управљање на основу унутрашњег модела – **IMC** (**I**nternal **M**odel **C**ontrol), које подразумева укључивање номиналног модела процеса у регулациону структуру [52]. Комбинацију ова два приступа предлаже Ya. Z. Tsypkin и назива је **принципом заједничког унутрашњег модела и управљања,** скраћено **IMPACT** (**I**nternal **M**odel **P**rinciple **A**nd **C**ontrol **T**ogether) [53]. Оваква структура искључује утицаје познатих класа спољних поремећаја на управљану променљиву и побољшава робусност система у односу на промене параметара процеса [54].

Употреба принципа унутрашњег модела практично значи да се модел поремећаја (или грешке праћења референце) укључује унутар структуре регулатора на такав начин да се поремећај елиминише – апсорбује, и на тај начин резултује у асимптотском одбацивању свих поремећаја (или грешака у праћењу референце) који се могу описати са истом структуром модела. Дакле, од фундаменталног значаја за овај приступ је описивање сигнала као модела. Стога, прво ће бити показано како се врши описивање модела поремећаја у односу на модел екситационог сигнала, а потом ће бити објашњен сам принцип унутрашњег модела и његова имплементација у методи подешавања полова са полиномијалним једначинама. На крају ће бити приказана примена принципа унутрашњег модела за асимптотску елиминацију грешке у праћењу референце.

3.8.1 Модел поремећаја

Размотримо модел:

$$\Phi\left(z^{-1}\right) \cdot \varphi(k) = \varepsilon(k), \tag{3.96}$$

где је:

$$\Phi\left(z^{-1}\right) = 1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \ldots + f_{\deg\Phi} z^{-(\deg\Phi)}, \tag{3.97}$$

док је ε сигнал екситације, на пример импулс или бели шум:

$$\begin{cases} \varepsilon(k) = \sigma, & k = 0, \\ \varepsilon(k) = 0, & k \neq 0. \end{cases} \tag{3.98}$$

$$\begin{cases} E\{\varepsilon(k)\} = 0, & k = 0, \\ E\{\varepsilon(k)\varepsilon(k-t)\} = \sigma^2, & t = 0, \\ E\{\varepsilon(k)\varepsilon(k-t)\} = 0, & t \neq 0. \end{cases} \tag{3.99}$$

Уколико је сигнал $\varphi(k)$ ненулти ограничени поремећај, тада ће полином $\Phi\left(z^{-1}\right)$ имати нуле унутар јединичног круга z равни.

Претпоставим да је $\varepsilon(k)$ импулс. Онда је:

$$\Phi\left(z^{-1}\right) \cdot \varphi(k) = 0, \quad k \geq \deg\Phi, \tag{3.100}$$

за све почетне вредности, $\varphi(-1), \ldots, \varphi(-\deg\Phi)$. Стога $\Phi\left(z^{-1}\right)$ апсорбује тј. анихилира цео сет поремећаја по завршетку прелазног процеса. Полином $\Phi\left(z^{-1}\right)$ можемо назвати анихилационим полиномом, и од велике је важности, што ће доцније бити и показано. Осим тога, $\Phi\left(z^{-1}\right)$ је једина информација коју је потребно познавати о поремећају $\varphi(k)$. Такође, приметимо да ће, уколико дефинишемо P_φ као:

$$\Phi\left(z^{-1}\right) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot P_\varphi\left(z^{-1}\right), \tag{3.101}$$

по завршетку прелазног процеса у стационарном стању, бити:

$$\varphi(k+1) = P_\varphi\left(z^{-1}\right) \cdot \varphi(k), \tag{3.102}$$

где полином $P_\varphi\left(z^{-1}\right)$ врши једнокорачну предикцију поремећаја $\varphi(k)$. За моделе различитих поремећаја у табели 3.2. је приказана њихова листа са одговарајућим полиномима анихилације и предикције.

Табела 3.2. Модели поремећаја

$\varphi(k)$	$\Phi\left(z^{-1}\right)$	$P_\varphi\left(z^{-1}\right)$
a	$1 - z^{-1}$	1
$a + bk$	$\left(1 - z^{-1}\right)^2$	$2 - z^{-1}$
$a + bk + ck^2$	$\left(1 - z^{-1}\right)^3$	$3 - 3z^{-1} + z^{-2}$
$a\sin(\omega k + b)$	$1 - 2\cos\omega \cdot z^{-1} + z^{-2}$	$2\cos\omega - z^{-1}$
$\varphi(k) = \varphi(k - T)$	$1 - z^{-T}$	$z^{-(T-1)}$

3.8.2 Принцип унутрашњег модела

На основу излагања у претходном делу, можемо дефинисати принцип унутрашњег модела за методу подешавања полова са полиномијалним једначинама. Дакле, уколико је систем описан са:

$$A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)\varphi(k)\,, \tag{3.103}$$

и линеарним регулатором:

$$R(z)u(k) = -S(z)y(k) + T(z)r(k)\,, \tag{3.104}$$

у затвореној повратној спрези, резултоваће следећим функцијама дискретног преноса:

$$y(k) = \frac{B(z)\cdot T(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot r(k) + \frac{R(z)\cdot C(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot \varphi(k)\,, \tag{3.105a}$$

$$u(k) = \frac{A(z)\cdot T(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot r(k) - \frac{S(z)\cdot C(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot \varphi(k)\,. \tag{3.105б}$$

Ако претпоставимо да се поремећај φ може моделовати са:

$$\Phi\left(z^{-1}\right)\cdot \varphi\left(k\right) = 0, \quad k \geq \deg\Phi\,, \tag{3.100}$$

тада ће поремећај бити асимптотски елиминисан из излаза $y(z)$ ако је:

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{R(z)\cdot C(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot \varphi(k)\right\} = 0\,. \tag{3.106}$$

Ово ће бити испуњено уколико су испуњени следећи услови:

1. $\Phi\left(z^{-1}\right)$ се садржи у $R(z)$, тј. $R(z) = \Phi(z)\cdot R_1(z)$, и

2. Карактеристични полином је стабилан $\left(A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z) \neq 0,\ |z| \leq 1\right)$.

Укључивање модела поремећаја, који је описан са $\Phi\left(z^{-1}\right)$ у полином $R(z)$ регулатора назива се **принцип унутрашњег модела**. Често се среће и под именом анихилација поремећаја или апсорпција поремећаја.

3.8.3 Елиминација грешака у праћењу референце

Принцип унутрашњег модела се, као што је напоменуто, може применити и на елиминацију грешака у праћењу референце (енг. tracking errors), када се сигнал референце $r(k)$ може описати моделом:

$$\Phi\left(z^{-1}\right)\cdot r\left(k\right) = 0, \quad k \geq \deg\Phi\,. \tag{3.107}$$

Различите референце се могу специфицирати избором почетних стања $r(-1),\ldots,r(-\deg\Phi)$. Еквивалентно том, референца се може записати као:

$$\Phi\left(z^{-1}\right)\cdot r(k)=N\left(z^{-1}\right)\cdot\varepsilon(k),\quad\begin{cases}\varepsilon(k)=1, & k=0,\\ \varepsilon(k)=0, & k\neq 0,\\ \deg N<\deg\Phi.\end{cases}\tag{3.108}$$

где су сва почетна стања нуле, тј. $r(-1)=\ldots=r(-\deg\Phi)=0$, а референтни сигнал $r(k)$ је започет са јединичним (Дираковим) импулсом. Коефицијенти полинома $N\left(z^{-1}\right)$ се могу одредити на основу следећег израза:

$$\begin{aligned}&r(0)=n_0,\\&r(1)+f_1r(0)=n_1,\\&r(2)+f_1r(1)+f_2r(0)=n_2,\\&\vdots\\&r(\deg\Phi)+f_1r(\deg\Phi-1)+\ldots+f_{\deg\Phi}r(0)=n_{\deg\Phi}=0.\quad(\deg N<\deg\Phi)\end{aligned}\tag{3.109}$$

где је:

$$\begin{aligned}&r(k)+f_1r(k-1)+\ldots+f_{\deg\Phi}r(\deg\Phi)=\Phi\left(z^{-1}\right)\cdot r(k)=0,\\&N\left(z^{-1}\right)=n_0+n_1z^{-1}+\ldots n_{\deg N}z^{-\deg N}.\end{aligned}\tag{3.110}$$

Надаље, у случају познате референце, она се може унапред увести у регулатор, тако да се елиминише временско кашњење система. Регулатор тада постаје:

$$R(z)u(k)=-S(z)y(k)+T(z)r(k+d)\,.\tag{3.111}$$

Ради појeдностављења писања, можемо увести полином $B_d(z)=z^dB(z)$, тако да је систем са затвореном спрегом описан са:

$$y(k)=\frac{B(z)\cdot T(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot r(k+d)=\frac{B_d(z)\cdot T(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot r(k)\,.\tag{3.112}$$

Грешка у праћењу референце је дата са:

$$\begin{aligned}&e(k)=r(k)-y(k)=r(k)-\frac{B_d(z)\cdot T(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot r(k)=\\&\frac{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)-B_d(z)\cdot T(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot\frac{N(z)}{\Phi(z)}\cdot\varepsilon(k).\end{aligned}\tag{3.113}$$

Ова грешка се може елиминисати уколико су испуњени следећи услови:

1. Карактеристични полином је стабилан $\left(A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)\neq 0,\ |z|\leq 1\right)$, и
2. Полином $\Phi\left(z^{-1}\right)$ се садржи у бројиоцу: $A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)-B_d(z)\cdot T(z)$.

Други услов резултује полиномијалном једначином:

$$B_d(z)\cdot T(z)+\Phi(z)\cdot M(z)=A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)\,.\tag{3.114}$$

где у циљу добијања што краћег прелазног процеса, треба за степен полинома $M(z)$ узети најмањи могући степен:

$$\deg M(z)=\deg B_d(z)-1\,.\tag{3.115}$$

Тада ће грешка у праћењу референце, тежити нули:

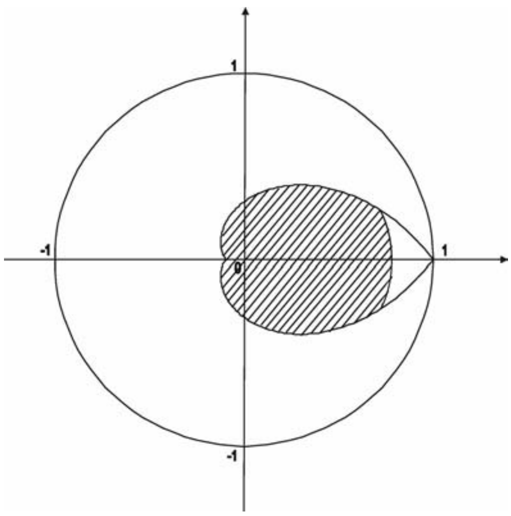
$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{M(z)\cdot N(z)}{A(z)\cdot R(z)+B(z)\cdot S(z)}\cdot\varepsilon(k)\right\}=0\,. \tag{3.116}$$

3.9 Практични аспекти у методи подешавања полова

У претходним одељцима је описан метод подешавања полова коришћењем полиномијалних једначина. У оквиру овог одељка биће дате неке од смерница које треба следити у пракси при пројектовању регулатора методом подешавања полова [2], [44]. У том циљу, биће размотрена питања везана за скраћивање полова и нула, избор периоде одабирања, избор жељене функције дискретног преноса и проблем амплитуде сигнала управљања и његовог ограничења.

3.9.1 Практична разматрања при скраћивању полова и нула

У пракси при доношењу одлуке о скраћивању полова и нула треба бити резервисан. Понекад скраћивање нула у целини може бити непожељно, што је чест случај у пракси, будући да услед варијације параметра процеса варирају и нуле и полови функције дискретног преноса којом се описује тај процес, нарочито када су у питању слабо пригушене нуле (нпр. нуле ван шрафираног региона на слици 3.3.). Са друге стране, скраћивање нула са негативним реалним делом уноси скоковитост и таласност (енгл. “ringing”, “ripple”) у одзиву управљачког сигнала. У неким случајевима ипак, може бити разложно скратити нуле које су добро пригушене. Један од начина да се то формално искаже је дефинисање региона унутар јединичног круга z равни који одговара одређеном релативном пригушењу (линије константног релативног пригушења су логаритамске спирале) и апсолутном пригушењу (линије константног апсолутног пригушења су кружнице), као што је приказано сликом 3.3. Дакле, можемо скратити само оне нуле које припадају датом региону тј. налазе се у шрафираној области.



Слика 3.3. Област у којој све тачке имају релативно и апсолутно пригушење мање од задатог

3.9.2 Избор периоде одабирања

Избор периоде одабирања у процесу пројектовања дигиталног закона управљања је највећим делом условљен структуром објекта управљања, односно временским константама које проистичу из вредности полова његове функције преноса и транспортним кашњењем. Периода одабирања T_s мора задовољавати услов теореме одабирања, тј. мора бити мања од најмање временске константе објекта. Такође, мора бити мања од транспортног кашњења јер би се у супротном изгубила информација о тренутној вредности управљане променљиве. Са друге стране, систем у затвореној повратној спрези има већу брзину реаговања од система када му је повратна спрега раскинута. Иако је могуће захтевати произвољну брзину реаговања система у затвореној повратној спрези, при пројектовању дигиталног закона управљања не би требало захтевати да систем у затвореној спрези има много већу брзину реаговања од оне коју допушта сама динамика система, јер би то резултовало са регулатором високог реда код кога би било изражено диференцијално дејство. Стога када се пре синтезе задају жељени параметри континуалног одзива система, имајући у виду ограничења која намеће објекат управљања посебно у погледу пропусног опсега (брзине реаговања система у затвореној спрези), периоду одабирања треба усвојити да буде 3 до 4 пута већа од граничне учестаности f_0 пропусног опсега система, односно према наредној искуственој релацији [45]:

$$T_s \approx \frac{1}{(3 \div 4) f_0}.$$

Претходна релација испуњава услове теореме одабирања и захтеве за довољно верним постизањем параметара одзива, међутим треба имати у виду додатне факторе који се могу појавити у условима различитих режима рада и ограничења. Тако, уколико се унутар објекта управљања налази извршни орган велике инерцијалности, тада се може десити да при малој периоди одабирања извршни орган не може да одради управљачку променљиву пре пристизања нове вредности те променљиве у следећем тренутку одабирања.

Такође, у условима када се у систему користи идентификација или естимација параметара објекта управљања, као код самоподешавајућих регулатора, периода одабирања се не сме усвојити сувише малом јер би се у супротном могао да наруши захтев за радом у реалном времену.

3.9.3 Избор жељене функције дискретног преноса

Жељене перформансе у погледу одзива серво система се специфицирају адекватним избором функције дискретног преноса у затвореној спрези $G_M(z)$. На основу дискусије у одељку **3.4.** јасно је да се нестабилне или слабо пригушене нуле морају садржати у бројиоцу изабране функције дискретног преноса у затвореној спрези, што резултује релацијом (3.56):

$$B_m(z) = B^-(z) \cdot B'_m(z)\,. \tag{3.56}$$

Уколико релација (3.56) није испуњена, у одзиву система са затвореном повратном спрегом који је пројектован методом подешавања спектра полова ће доћи до појаве шума тј. до појаве тзв. "ringing"-а. Такође, при избору функције дискретног преноса у затвореној спрези $G_M(z)$, да би избегли претходно наведене проблеме, потребно је водити рачуна и о транспортном кашњењу процеса.

Одређивање и избор свих полова и нула за систем вишег реда често захтева много више параметара од доступних у пракси. Међутим, најчешће су доступне само неке од основних карактеристика захтеваних перформанси у одзиву система као што су пропусни опсег и прескок. На основу познавања претходних параметара, могуће је испунити захтеване перформансе правилним избором доминантних полова.

Уколико желимо да систем у затвореној спрези буде са апериодичним одзивом, тада се доминантни пол може задати са изразом:

$$P_1(z) = z - a\,, \tag{3.117}$$

где је a дато са:

$$a = e^{-\frac{T_s}{T_d}}\,. \tag{3.118}$$

У изразу (3.118) T_s је периода одабирања, док је T_d жељена доминантна временска константа. Остале полове система можемо изабрати према [2]. Наиме, јасно је да ће систем са половима на позитивном делу реалне осе унутар јединичног круга z-равни имати најшири пропусни опсег када су ти полови исти. Што су полови ближи координатном почетку z-равни то је брзина реаговања већа. Пропусни опсег постаје бесконачан када су сви полови у координатном почетку z-равни (“dead-beat” управљање). Дакле:

$$A_m(z) = \left[P_1(z)\right]^n = (z - a)^n\,, \tag{3.119}$$

где је n ред система $G_M(z)$, тј. степен полинома A_m у имениоцу, који бирамо према процесу у складу са разматрањем у одељку **3.5.**

Друга могућност је да према [2] остатак полова изаберемо у координатном почетку z-равни, што би резултовало са:

$$A_m(z) = z^{n-1} \cdot (z - a). \tag{3.120}$$

Уколико желимо да систем у затвореној спрези буде са пригушено-осцилаторним одзивом, тада су доминантни полови коњуговано-комплексни и могу се задати са изразом:

$$P_1(z) = z^2 + p_1 z + p_2\,, \tag{3.121}$$

где су p_1 и p_2 дати са:

$$p_1 = -2e^{-\zeta\omega T_s}\cos\left(\omega T_s\sqrt{1-\zeta}\right), \tag{3.122}$$

$$p_2 = e^{-\zeta\omega T_s}\,. \tag{3.123}$$

У изразима (3.122) и (3.123) T_s је периода одабирања, ζ је жељени фактор релативног пригушење док је ω жељена непригушена природна учестаност. Остале полове система можемо изабрати слично као и у претходном случају. Наиме, једна могућност је да према [2] остатак полова изаберемо у координатном почетку z-равни, што би резултовало са:

$$A_m(z) = z^{n-2} \cdot \left(z^2 + p_1 z + p_2\right). \tag{3.124}$$

Друга могућност је да остале полове система изаберемо на позитивном делу реалне осе унутар јединичног круга z-равни, тако да њихова вредност буде једнака реалном делу коњуговано-комплексних полова, односно:

$$p_3 = \zeta \cdot \omega\,. \tag{3.125}$$

Тада је израз за полином A_m у имениоцу система $G_M(z)$, дефинисан са:

$$A_m(z) = (z - p_3)^{n-2} \cdot \left(z^2 + p_1 z + p_2\right). \tag{3.126}$$

Нуле, тј. полином B_m у бројиоцу $G_M(z)$, су већ, као што је речено, дефинисане са $B^-(z)$. Полином $B'_m(z)$ бирамо као константу К, која да би обезбедили серво перформансе система са затвореном повратном спрегом, дефинисана са:

$$K = \frac{A_m(1)}{B^-(1)}. \tag{3.127}$$

Потребно је још напоменути да када се у оквиру процеса налази и динамички систем као што је нпр. “antialiasing” филтар, положај полова који припадају том филтру не би требало мењати у оквиру дизајна регулатора.

3.9.4 Проблем ограничења амплитуде сигнала управљања

Веома је логично да су у случају жељеног великог пропусног опсега неопходни управљачки сигнали велике амплитуде. То је могуће илустровати следећим разматрањем; уколико занемаримо поремећаје, на основу релација (3.1) і (3.5), може се писати:

$$y(z) = G_M(z)\cdot r(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}r(z),$$

$$y(z) = G_P(z)\cdot u(z) = \frac{B(z)}{A(z)}u(z).$$

Одавде је:

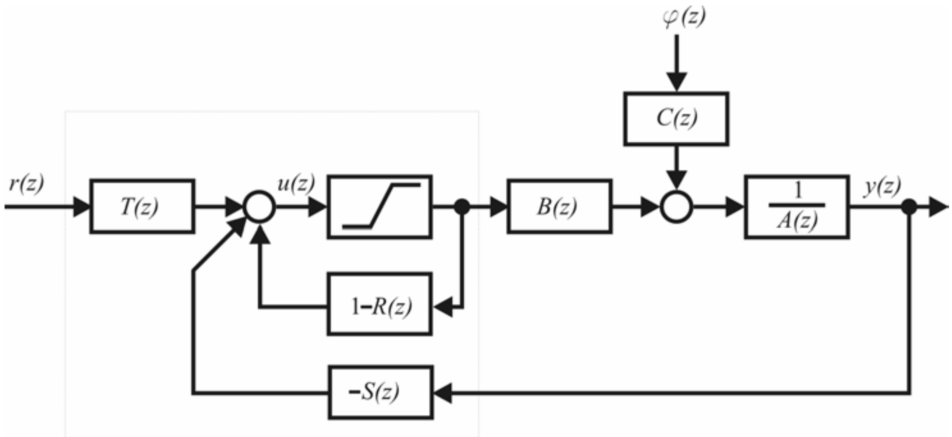
$$u(z) = \frac{G_M(z)}{G_P(z)}\cdot r(z). \tag{3.128}$$

Израз (3.128) показује квантитативно колики се управљачки сигнал може очекивати на основу одређеног сигнала рефренце. Ред величине амплитуда се лако може одредити разматрањем Бодеових дијаграма функција преноса $G_P(z)$ и $G_M(z)$. Такође, анализом поменутих дијаграма може се сагледати утицај промене жељеног пропусног опсега система (тј. његове брзине реаговања). Тако на основу поменуте анализе се може закључити да ће се у случају удвостручења жељене учестаности пропусног опсега система, односно повећања жељене брзине реаговања система за два пута, амплитуда управљачког сигнала повећати четири пута. Одавде се закључује да при избору жељеног пропусног опсега система треба имати у виду и амплитуду управљачког сигнала, будући да она јако зависи од поменуте величине.

У скоро свим имплементацијама дигиталне регулације у пракси, управљачки сигнал је ограничен објектом регулације. Такође, многи регулатори поседују интегрално дејство, што их чини нестабилним у отвореној спрези. Из претходног следи да ће у случају достизања максимално дозвољене вредности управљачке променљиве, она наставити да се увећава, односно кажемо да интегратор улази у засићење. Тада ће у тренутку промене знака грешке бити потребан дужи временски период да се управљачки сигнал врати у границе које су одређене ограничењем објекта регулације, будући да је претходно достигао неку енормно велику вредност. Ово доводи до ексцесних осцилација у одзиву система, и долази до смањења брзине реаговања регулатора. Засићење интегратора се у литератури још назива и windup-ом интегратора. Да би се контролисао прираштај управљачке променљиве и спречио пораст изнад њене максималне вредности, користи се модификација регулатора његовим извођењем у инкременталној форми (anti-windup), што је показано у [26], [45]. У случају методе подешавања полова, у складу са одељцима **3.7.** и **3.8.**, могуће је да дигитални закон управљања који је добијен методом подешавања полова у себи поседује интегрално дејство које се налази у полиному *R(z)*. Тада је на начин који је показан сликом 3.4. могуће имплементирати полиномијални регулатор према изразима:

$$u(z) = -S(z)y(z) + T(z)r(z) + \left(1 - R(z)\right)v(z)\,, \tag{3.129}$$

$$v(z) = sat\left[u(z)\right]. \tag{3.130}$$



Слика 3.4. Инкрементална (anti-windup) реализација полиномијалног регулатора.

3.10 Метода подешавања полова у односу на друге методе

Метода подешавања полова приступом са полиномијалним једначинама представља уопштени прилаз у синтези система са једним улазом и једним излазом (SISO). Општост овог метода се може препознати преко многих других алгоритама за синтезу дигиталних система аутоматског управљања који се могу интрепретирати као специјалан случај метода подешавања полова.

У овом одељку ћемо укратко указати на неке од тих алгоритама синтезе дигиталних система управљања.

3.10.1 Метода геометријског места корена

Метода геометријског места корена (ГМК) представља једну од класичних метода за синтезу дигиталних система управљања. Метод је заснован на истој основи као и метод подешавања полова, односно на жељи да се полови спрегнутог система поставе на жељену локацију. Код овог метода су, у светлу методе подешавања полова, полиноми R и S унапред изабрани као $R = 1$ и $S = K$, што одговара регулатору са пропорционалним дејством. Потом се појачање К мења, при чему се анализирају корени карактеристичне једначине:

$$A(z) + K \cdot B(z) = 0\,. \tag{3.131}$$

Уколико се не оствари жељено подешавање корена карактеристичне једначине, редови полинома R и S се повећавају користећи се хеуристичким правилима, а потом се процедура понавља.

Јасно је да је метода подешавања полова описана у овом поглављу, једноставнија и лакша за коришћење од методе геометријског места корена, будући да се подешавање полова врши у једном пролазу кроз процедуру. Са друге стране, метода геометријског места корена резултује једноставнијим регулатором, уколико он постоји за дати проблем.

3.10.2 Смитов предиктор

Смитов предиктор [2], [54] се предлаже као закон управљања у процесима са великим транспортним кашњењем, и синтеза овог закона управљања се може описати на следећи начин.

Размотримо процес са функцијом дискретног преноса:

$$G(z) = \frac{1}{z^d} G'(z) = \frac{B'(z)}{z^d A'(z)}, \tag{3.132}$$

где је $\deg A'(z) = \deg B'(z)$. Број d представља транспортно кашњење система. Најпре се изврши синтеза функције преноса у повратној спрези:

$$G_{fb}(z) = \frac{S'(z)}{R'(z)}, \tag{3.133}$$

која резултује жељеним перформансама спрегнутог система без кашњења. Када у систему постоји кашњење, Смитов предиктор резултује следећим законом управљања:

$$u(z) = G_{fb}(z)\big(r(z) - y(z)\big) - G'(z)G_{fb}(z)\big(1 - z^d\big)u(z). \tag{3.134}$$

Функција преноса система са затвореном повратном спрегом је у том случају описана са:

$$\frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{B'(z)S'(z)}{z^d\left(A'(z)R'(z) + B'(z)S'(z)\right)}. \tag{3.135}$$

Синтеза Смитовог предиктора се веома лако може извршити методом подешавања полова. Нека је процес дат са изразом (3.133), и нека је жељена функција спрегнутог преноса описана са (3.135). Надаље, нека регулатор користи повратну спрегу по грешци. Тада се може писати:

$$u(z) = \frac{S(z)}{R(z)}\big(r(z) - y(z)\big) = \frac{A(z)B_m(z)}{B(z)\big(A_m(z) - B_m(z)\big)}\big(r(z) - y(z)\big). \tag{3.136}$$

Регулатор је стога описан са:

$$\frac{S(z)}{R(z)} = \frac{z^d A'(z)S'(z)}{z^d\left(A'(z)R'(z) + B'(z)S'(z)\right) - B'(z)S'(z)} = \frac{G_{fb}(z)}{1 + G'(z)G_{fb}(z)\big(1 - z^{-d}\big)}. \tag{3.137}$$

Израз (3.137) се може преписати у форми Смитовог предиктора који је дат изразом (3.134). Приметимо да је у току пројектовања неопходно скратити све полове процеса, зато што се при синтези овог закона управљања користи само повратна спрега по грешци.

3.10.3 Регулација са праћењем модела (Model following control)

Закон управљања који је резултат методе подешавања полова се може тумачити као регулатор са праћењем модела (model following controller). Да би смо то показали препишимо израз (3.65), уз коришћење израза (3.64), на следећи начин:

$$\frac{T(z)}{R(z)}=\frac{B_m'(z)\cdot A_o'(z)\cdot A^+(z)}{B^+(z)\cdot R'(z)}=\frac{B_m'(z)\cdot A_o'(z)\cdot A^+(z)\cdot A_m(z)}{B^+(z)\cdot R'(z)\cdot A_m(z)}=$$
$$=\frac{B_m'(z)\cdot\left(A(z)\cdot R'(z)+B^-(z)\cdot S(z)\right)}{B^+(z)\cdot R'(z)\cdot A_m(z)}=\frac{B_m'(z)\cdot A(z)}{B^+(z)\cdot A_m(z)}+\frac{B_m'(z)\cdot B^-(z)\cdot S(z)}{B^+(z)\cdot R'(z)\cdot A_m(z)}=$$
$$=\frac{B^-(z)\cdot B_m'(z)\cdot A(z)}{B^-(z)\cdot B^+(z)\cdot A_m(z)}+\frac{B_m'(z)\cdot B^-(z)\cdot S(z)}{B^+(z)\cdot R'(z)\cdot A_m(z)}=\frac{B_m(z)\cdot A(z)}{A_m(z)\cdot B(z)}+\frac{B_m(z)\cdot S(z)}{A_m(z)\cdot R(z)}.$$

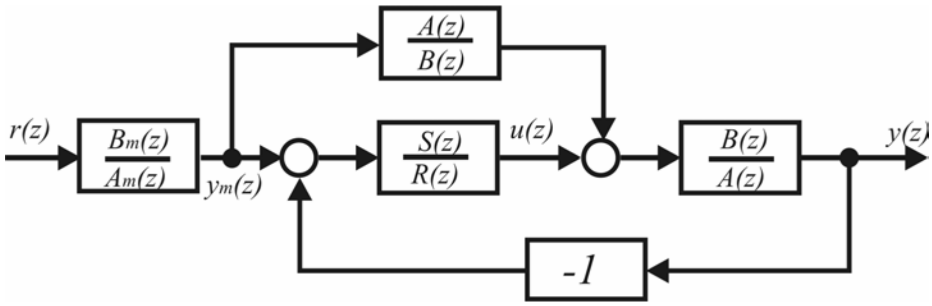
Имајући у виду претходно, закон управљања описан са (3.2) постаје:

$$u(z)=\frac{T(z)}{R(z)}\cdot r(z)-\frac{S(z)}{R(z)}\cdot y(z)=\frac{B_m(z)\cdot A(z)}{A_m(z)\cdot B(z)}\cdot r(z)+\frac{B_m(z)\cdot S(z)}{A_m(z)\cdot R(z)}\cdot r(z)-\frac{S(z)}{R(z)}\cdot y(z)$$
$$=\frac{B_m(z)\cdot A(z)}{A_m(z)\cdot B(z)}\cdot r(z)-\frac{S(z)}{R(z)}\cdot\left(y(z)-y_m(z)\right),\tag{3.138}$$

где је:

$$y_m(z)=\frac{B_m(z)}{A_m(z)}\cdot r(z).\tag{3.139}$$

Блок дијаграм који графички репрезентује израз (3.138) дат је сликом 3.5. Слика 3.5. показује да се дигитални регулатор добијен методом подешавања полова може тумачити као регулатор са праћењем модела.



Слика 3.5. Блок дијаграм закона управљања описаног изразом (3.138)

3.10.4 Дахлин-Хајамов алгоритам (The Dahlin-Higham algorithm)

Дахлин-Хајамов алгоритам [2], [45], је у ранијим применама дигиталне регулације био често коришћен метод за синтезу дигиталног система управљања, пре свега захваљујући својој једноставношћу. Примењује се углавном у регулацији типичне класе процеса која се може описати са изразом (3.132). Регулатор се пројектује тако да се полиноми $A'(z)$ и $B'(z)$ скрате динамиком регулатора. По скраћивању, динамика процеса је само транспортно кашњење, односно:

$$G''(z)=z^{-d}.\tag{3.140}$$

Да би се смањила грешка у стационарном стању, потребно је у регулатор унети интегрално дејство, што се постиже додавањем интегралног члана као чиниоца полинома R. Жељени модел са становишта методе подешавања полова је:

$$G_m(z) = \frac{1-a}{z^{d-1} \cdot (z-a)}. \tag{3.141}$$

Овако добијен регулатор се такође може интрепретирати и као регулатор са Смитовим предиктором.

Како је Дахлин-Хајамов алгоритам заснован на скраћивању свих полова и нула процеса, јасно је да процес не сме поседовати ни једну нестабилну нулу или пол. Такође, нагласимо да уколико процес поседује стабилну али веома слабо пригушену нулу, доћи ће, као што је већ речено у ранијим одељцима, до појаве рипла у управљачком сигналу због њеног скраћивања, што наравно нарушује укупне перформансе добијеног дигиталног система аутоматског управљања.

4 РАЧУНАРСКА АПЛИКАЦИЈА ЗА СИНТЕЗУ РЕГУЛАТОРА МЕТОДОМ ПОДЕШАВАЊА ПОЛОВА

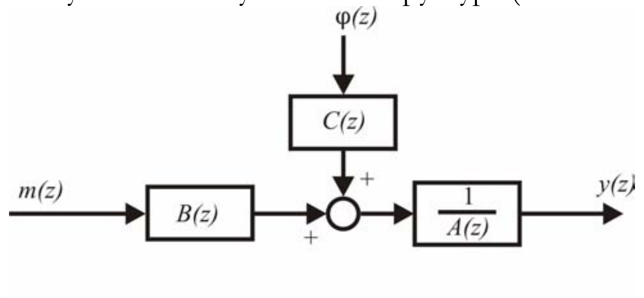
У претходном поглављу описана је метода подешавања полова за систем који је описан функцијом дискретног преноса, односно приступом са полиномијалним једначинама. Као резултат претходних разматрања, у овом поглављу биће дат сиже у виду конкретног алгоритма процедуре пројектовања дигиталног регулатора серво-система методом подешавања полова. На основу овог алгоритма начињена је апликација тј. графички интерфејс према кориснику (Graphical User Interface) у програмском окружењу Matlab® 6.0, која ће бити презентирана у наставку овог поглавља. Фајлови (**.m, *.mat*) који сачињавају наведену апликацију су дати у виду прилога на дискети која је приложена уз овај магистарски рад.

4.1 Алгоритам за процес пројектовања дигиталног регулатора серво-система методом подешавања полова

Процес пројектовања дигиталног регулатора серво система методом подешавања полова, који је детаљно дискутован у претходном поглављу, се може систематизовати и поделити на седам следећих корака:

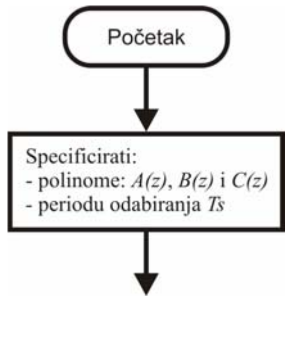
<u>КОРАК I</u>

Први корак у процесу пројектовања дигиталног регулатора серво-система методом подешавања полова је да се на основу познате функције дискретног преноса $G_P(z)$ која представља динамику процеса, укључујући коло задршке нултог реда (D/A конвертор), актуатор, сензор излаза са A/D конверзијом и antialiasing филтар и функције дискретног преноса поремећаја $G_\Phi(z)$, специфицира функција преноса објекта управљања и функција преноса поремећаја у облику каноничне уопштене структуре (слика 4.1.).

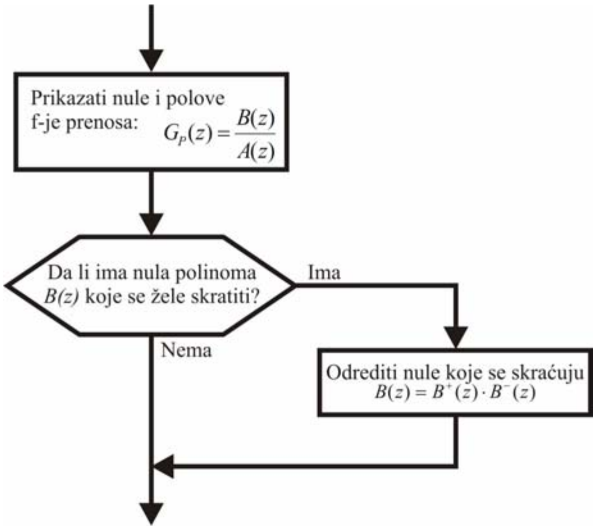


Слика 4.1. Канонична уопштена структура објекта управљања

Другим речима потребно је одредити полиноме $A(z)$, $B(z)$ и $C(z)$, којима се описују дате функције преноса, при чему $A(z)$ и $B(z)$, као и $A(z)$ и $C(z)$, немају заједничких чиниоца. Такође потребно је дефинисати периоду одабирања T_s.



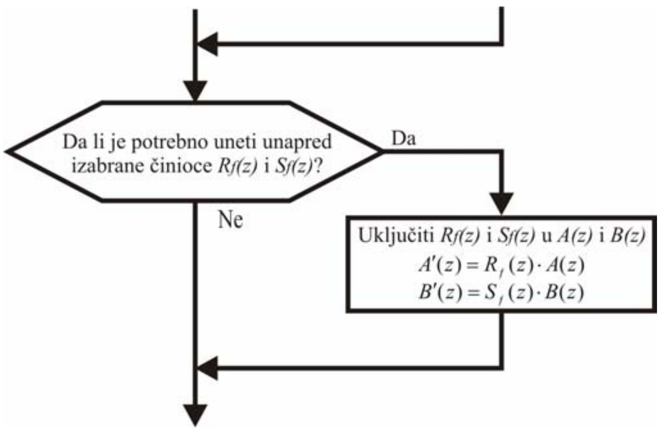
КОРАК II



Наредни корак је да се размотре полови и нуле система система са отвореном петљом, тј. полови и нуле функције дискретног преноса $G_P(z)$. У овом кораку је потребно донети одлуку о евентуалном скраћивању нула функције преноса $G_P(z)$ тј. нула полинома $B(z)$. При том треба водити рачуна да се једино смеју скраћивати нуле које леже унутар јединичног круга $\boldsymbol{z}$ равни. Осим тога, потребно је имати на уму да услед варијације параметра процеса варирају и нуле и полови функције дискретног преноса којом се описује тај процес, нарочито када су у питању слабо пригушене нуле, као и да скраћивање нула са негативним реалним делом уноси скоковитост и таласност (“ripple”) у одзиву управљачког сигнала.

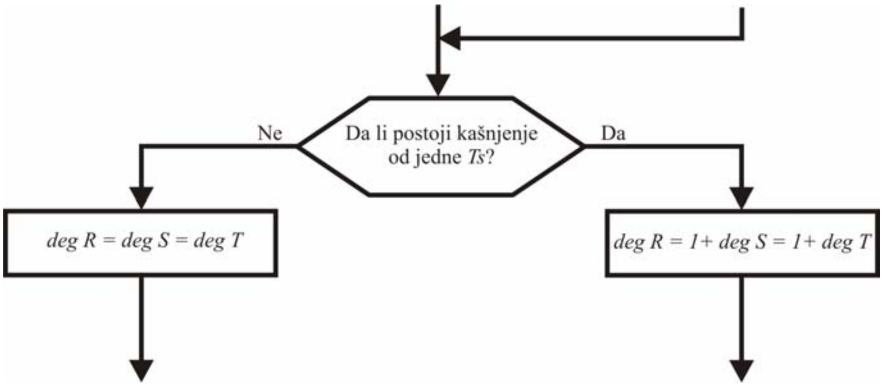
По доношењу одлуке о скраћивању нула потребно је извршити спецификацију полинома нула које се желе скратити $B^{+}(z)$ и полинома $B^{-}(z)$ који садржи у себи нуле које се не желе скратити и нуле које не леже унутар јединичног круга $\boldsymbol{z}$ равни. Другим речима потребно је извршити растављање на чиниоце полинома $B(z)$ на следећи начин: $B(z) = B^{+}(z) \cdot B^{-}(z)$.

КОРАК III



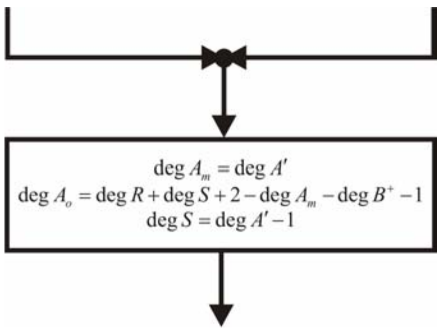
У претходном поглављу је показано да се неки захтеви и карактеристике регулатора, као што је нпр. захтев за редуковањем утицаји услед поремећаја и мерног шума, могу постићи специфичним обликом полинома $R(z)$ и $S(z)$, односно укључивањем неких унапред изабраних чинилаца $R_f(z)$ и $S_f(z)$, у наведене полиноме, као $R(z) = R_f(z) \cdot R''(z)$ и $S(z) = S_f(z) \cdot S''(z)$. Из тог разлога у трећем кораку је потребно дефинисати унапред изабране чиниоце $R_f(z)$ и $S_f(z)$. По уношењу изабраних чиниоца, ове факторе треба укључити у бројилац и именилац функције преноса процеса, тако да је $A'(z) = R_f(z) \cdot A(z)$ и $B'(z) = S_f(z) \cdot B(z)$.

КОРАК IV



У четвртом кораку најпре је потребно извршити избор степена полинома R. Као што смо већ нагласили, каузалност закона управљања се обезбеђује уколико су испуњени услови $\deg R \geq \deg T$ и $\deg R \geq \deg S$. Уколико је време прорачуна управљачког сигнала мали део периоде одабирања, природно је захтевати да буде испуњено $\deg R = \deg S = \deg T$, док је за време прорачуна управљачког сигнала блиском трајању периоде одабирања, уместо наведене релације потребно узети $\deg R = 1 + \deg S = 1 + \deg T$, што упућује на постојање кашњења од једне периоде одабирања у дигиталном регулатору.

КОРАК V



У петом кораку је потребно извршити избор реда функције преноса дигиталног закона управљања пројектованог методом подешавања полова, односно одредити степене полинома тако да се добије решење минималног реда. На основу претходно специфицираних параметара потребно је одредити $\deg A'$ и $\deg B^+$ а потом на основу релација које проистичу из разматрања у претходном поглављу, одредити и остале степене полинома:

$$\deg S = \deg A' - 1, \tag{4.1}$$

$$\deg R = \deg S \text{ или } \deg R = 1 + \deg S, \tag{4.2}$$

$$\deg A_m = \deg A', \tag{4.3}$$

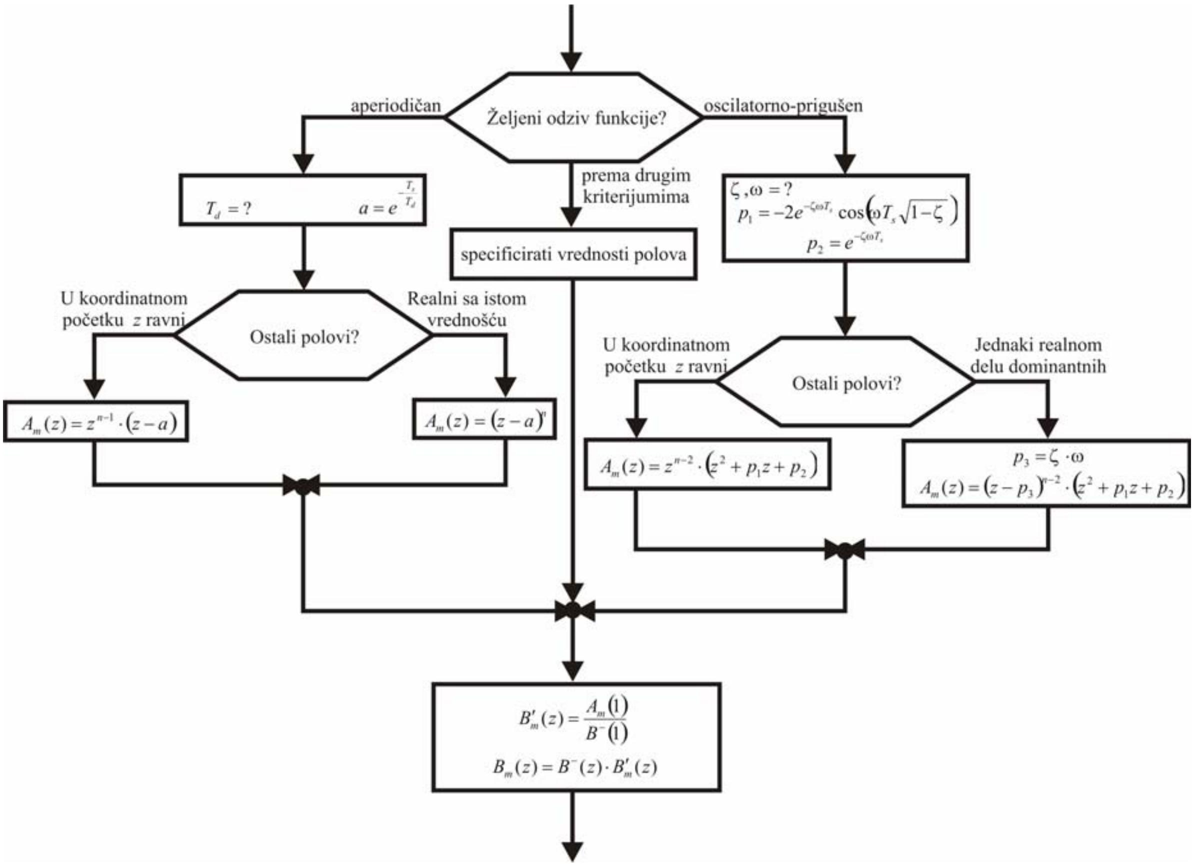
$$\deg A_o = \deg R + \deg S + 2 - \deg A_m - \deg B^+ - 1, \tag{4.4}$$

КОРАК VI

У шестом кораку алгоритма специфицирамо жељене перформансе у погледу одзива серво система адекватним избором функције дискретног преноса у затвореној спрези $G_M(z)$. На основу дискусије у претходном поглављу, одељак **4.8.3.**, овој спецификацији можемо приступити на више начина и то:

- систем у затвореној спрези је са апериодичним одзивом,
- систем у затвореној спрези је са пригушено-осцилаторним одзивом, и
- спецификацијом вредности полова система у затвореној спрези према другим критеријумима.

У првом случају дефинисаћемо жељену доминантну временску константу T_d, док је у другом случају потребно дефинисати жељени фактор релативног пригушење ζ и жељена непригушена природна учестаност ω. У трећем случају вршимо директну спецификацију полова система са затвореном спрегом. Нуле, тј. полином B_m у бројиоцу $G_M(z)$, су већ дефинисане са $B^-(z)$. Полином $B'_m(z)$ бирамо као константу К, која је, да би обезбедили серво перформансе система са затвореном повратном спрегом, дефинисана са $K = A_m(1)/B^-(1)$.



КОРАК VII

У последњем, седмом кораку алгоритма најпре је потребно дефинисати полином опсервера $A_o(z)$. У складу са закључцима донешеним у претходном поглављу, увођењем слободно изабраног полинома опсервера $A_o(z)$, могуће је редуковати утицаје услед поремећаја и мерног шума будући да су полиноми $R(z)$ и $S(z)$ повезани са полиномом опсервера $A_o(z)$ (имају заједничке чиниоце). По дефинисању нула полинома опсервера приступамо формирању Силвестерове (Sylvester) матрице на основу коефицијената полинома $A'(z)$ и $B'(z)$, а према једначини (3.40). Потом вршимо израчунавање полинома $R''(z)$, $S''(z)$ и $T(z)$, према изразима:

$$\begin{cases} A'(z)\cdot R''(z) + B'(z)\cdot S''(z) = A_m(z)\cdot A_o(z)\cdot B^+(z), \\ T(z) = B'_m(z)\cdot A_o(z). \end{cases}, \tag{4.5}$$

а потом налазимо и полиноме $R(z)$ и $S(z)$, решавањем једначина (4.6) и (4.7):

$$R(z) = R_f(z) \cdot R''(z), \tag{4.6}$$

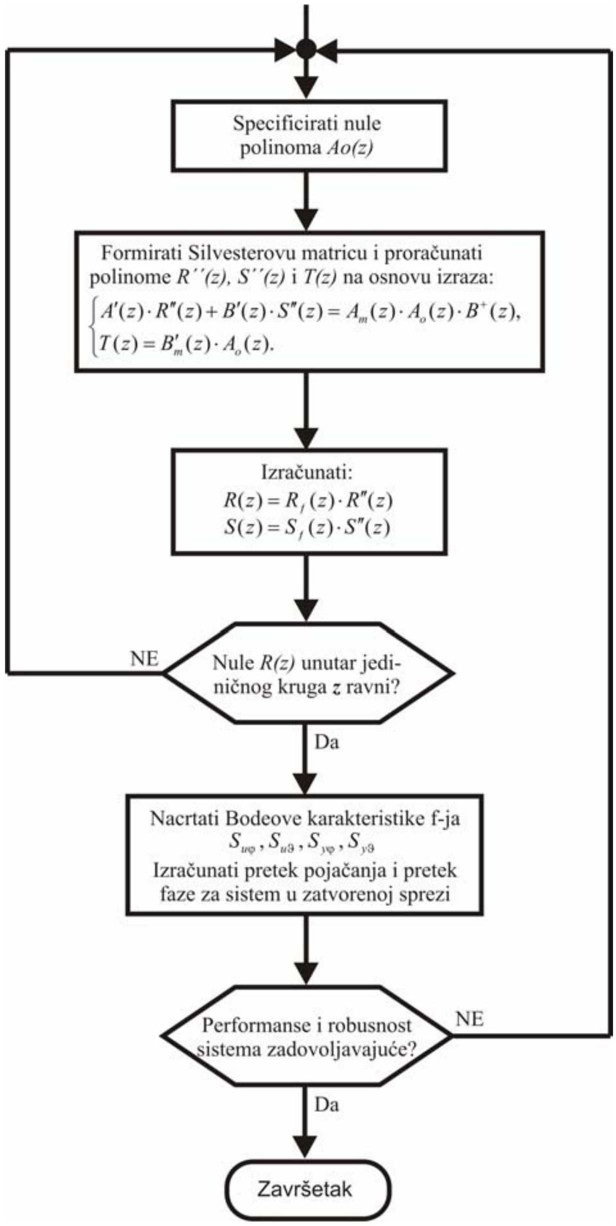
$$S(z) = S_f(z) \cdot S''(z). \tag{4.7}$$

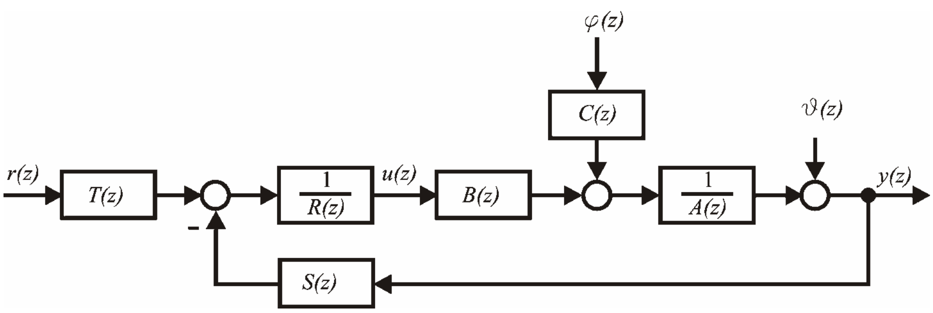
По завршеној процедури можемо сагледати утицај нула полинома опсервера $A_o(z)$ на улазне и излазне функције осетљивости пројектовањем Бодеових карактеристика поменутих функција, а на основу закључака изведених у претходном поглављу, одељак **4.6.** Наведени поступак можемо понављати променом нула полинома опсервера $A_o(z)$ док не добијемо задовољавајуће резултате. Са друге стране, нуле полинома опсервера утичу на коефицијенте полинома $R(z)$, тако да нам се може десити да су нуле полинома $R(z)$ ван јединичног круга z-равни за жељени полином опсервера. Уколико су нуле полинома $R(z)$ ван јединичног круга z-равни, дигитални закон управљања није стабилан.

Из претходно наведеног потребно је понављати процедуру док се не изнађе најповољније решење које задовољава како услове стабилности дигиталног закона управљања и робусности система у затвореној спрези, тако и што је могуће веће потискивање утицаја услед поремећаја и мерног шума.

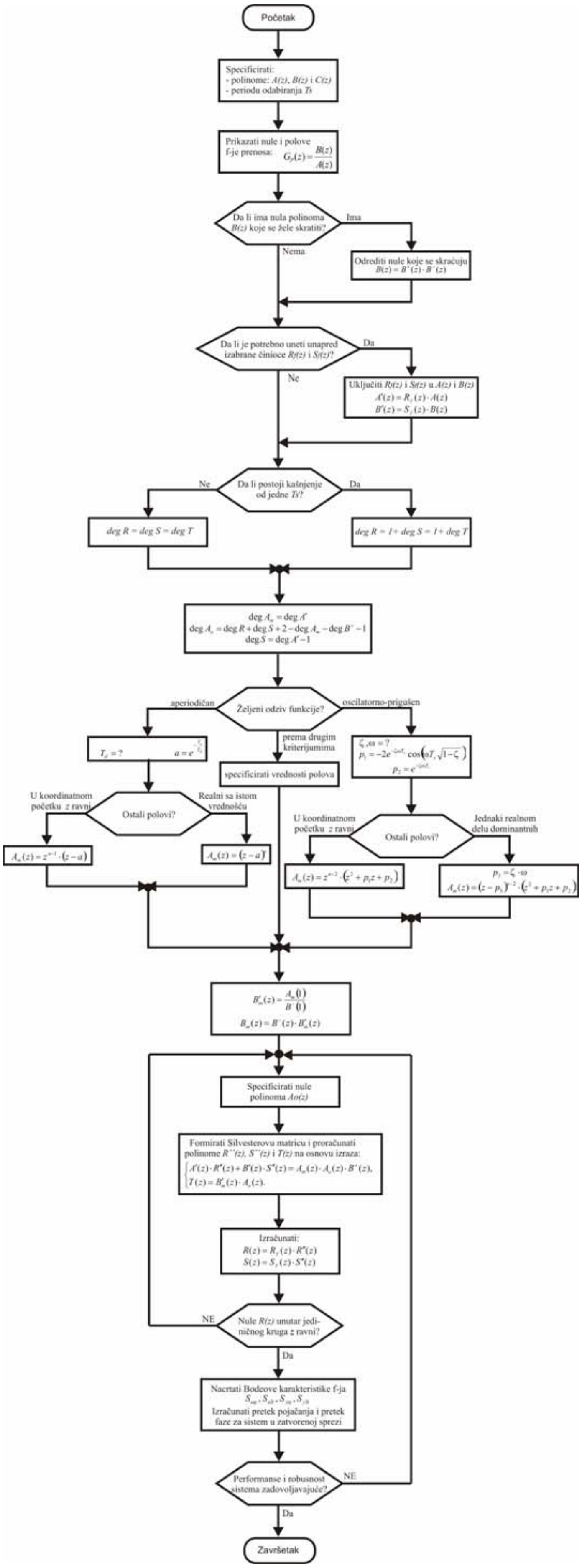
Завршетак процедуре, резултује одговарајућим полиномима $R(z)$, $S(z)$ и $T(z)$, који сачињавају дигитални регулатор система, као на слици 4.2.

Приказ комплетног алгоритма дат је на слици 4.3. на наредној страни.





Слика 4.2. Блок дијаграм система са затвореном повратном спрегом.

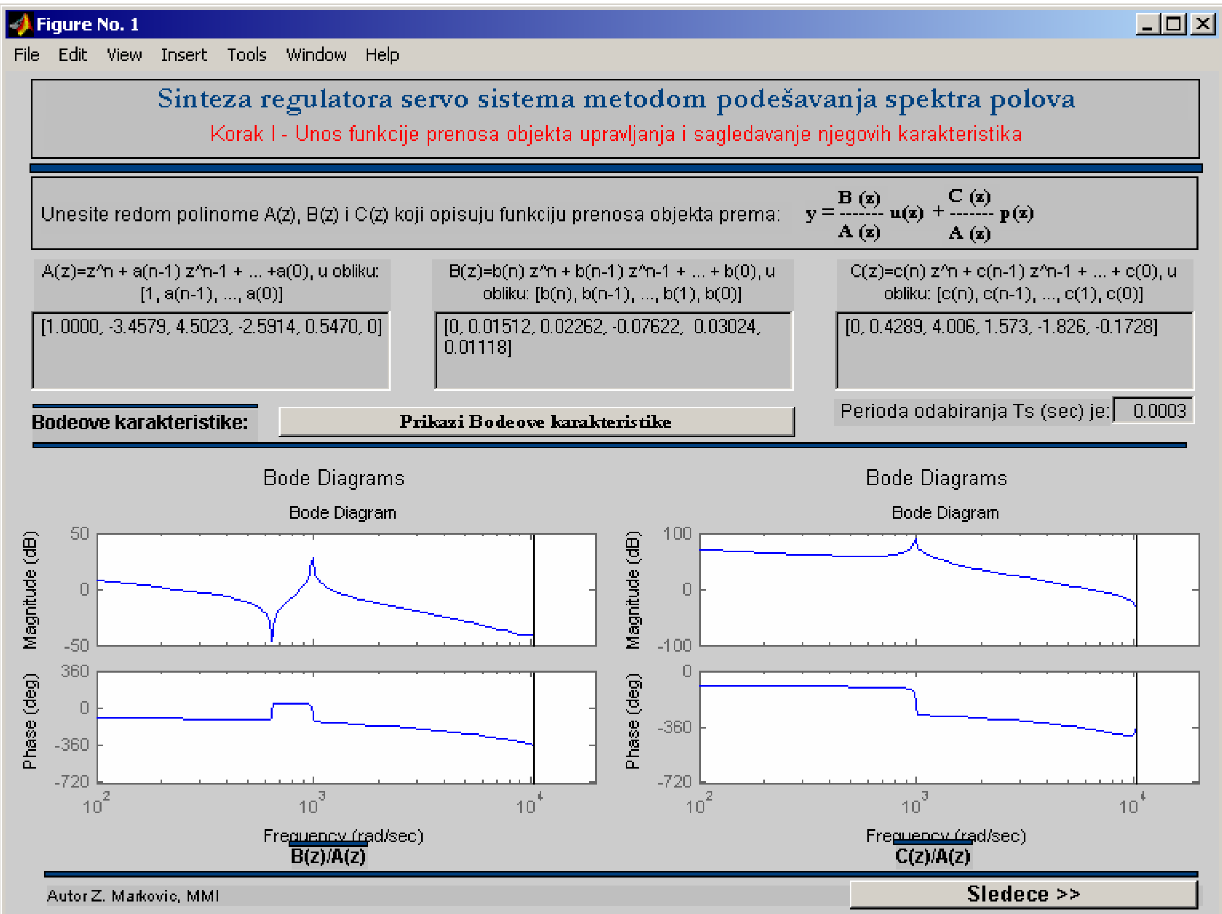

Početak
Specificirati:
- polinome: A(z), B(z) i C(z)
- periodu odabiranja Ts
Prikazati nule i polove
f-je prenosa:
Da li ima nula polinoma
B(z) koje se žele skratiti?
Ima
Nema
Odrediti nule koje se skraćuju
Da li je potrebno uneti unapred
izabrane činioce Rf(z) i Sf(z)?
Da
Ne
Uključiti Rf(z) i Sf(z) u A(z) i B(z)
Da li postoji kašnjenje
od jedne Ts?
Ne
Da
deg R = deg S = deg T
deg R = 1+ deg S = 1+ deg T
aperiodičan
Željeni odziv funkcije?
oscilatorno-prigušen
prema drugim
kriterijumima
specificirati vrednosti polova
U koordinatnom
početku z ravni
Ostali polovi?
Realni sa istom
vrednošću
U koordinatnom
početku z ravni
Ostali polovi?
Jednaki realnom
delu dominantnih
Specificirati nule
polinoma Ao(z)
Formirati Silvesterovu matricu i proračunati
polinome R''(z), S''(z) i T(z) na osnovu izraza:
Izračunati:
NE
Nule R(z) unutar jedi-
ničnog kruga z ravni?
Da
Nacrtati Bodeove karakteristike f-ja
Izračunati pretek pojačanja i pretek
faze za sistem u zatvorenoj sprezi
Performanse i robusnost
sistema zadovoljavajuće?
NE
Da
Završetak

4.2 Апликација за пројектовање дигиталног регулатора методом подешавања полова

На основу алгоритма који је изнет у претходном одељку, начињена је апликација тј. графички интерфејс према кориснику (Graphical User Interface), која значајно олакшава процедуру пројектовања дигиталног регулатора методом подешавања полова. Као радно окружење изабрано је програмско окружење Matlab® 6.0., будући да је овај пакет значајно оријентисан ка аутоматици и системима аутоматског управљања, а осим тога променљиве третира као векторе, односно матрице, чиме се смањује обим рачунарског кода и време за развој апликације. У овом одељку биће презентирана ова апликација.

ПРВИ ЕКРАН - КОРАК I

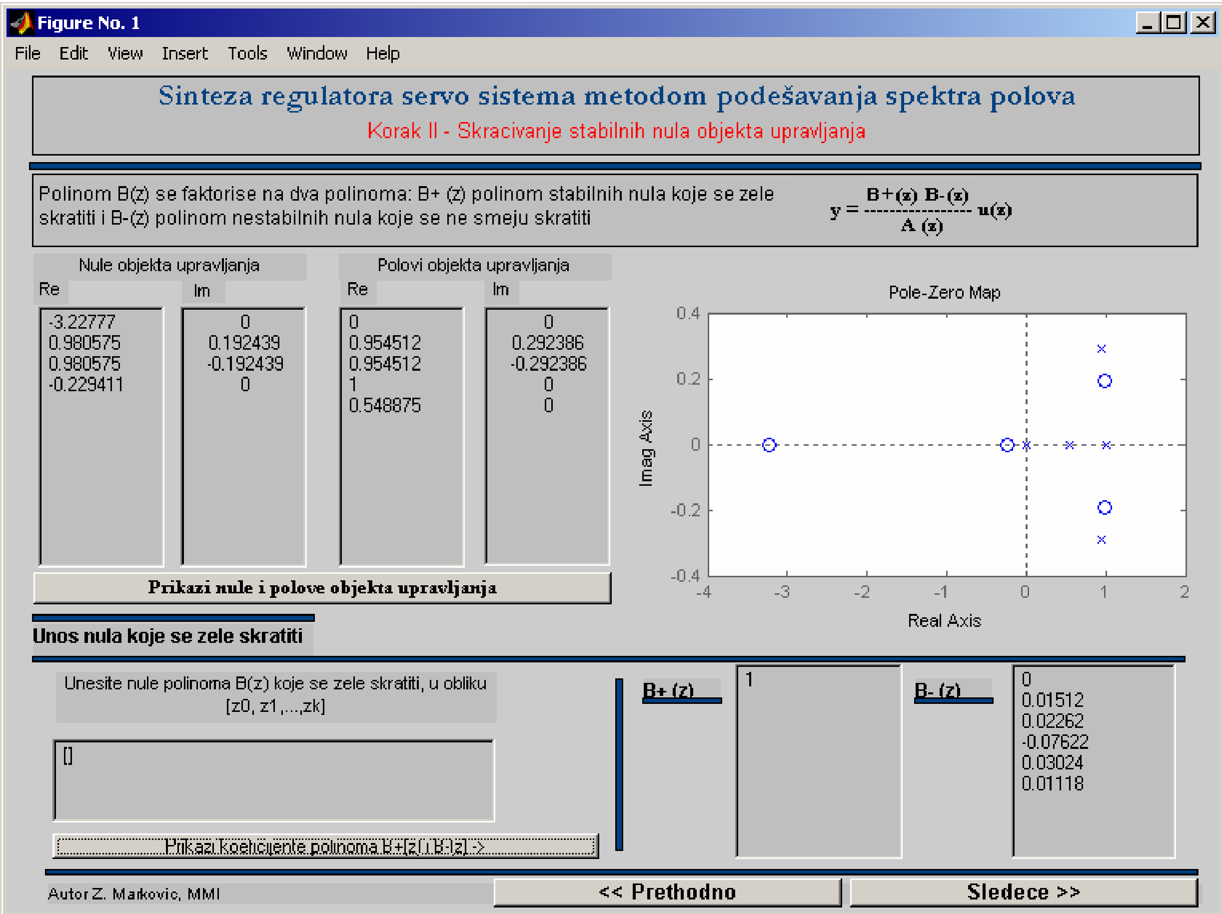
Први екран који се појављује стартовањем апликације подразумева **корак I** алгоритма из одељка **4.1.** У оквиру овог екрана, корисник уноси полиноме *A(z), B(z)* и *C(z)*, којима се описује функција преноса објекта управљања за који се врши синтеза дигиталног регулатора. Корисник даље уноси периоду одабирања T_s а потом притиском на дугме ***"Прикажи Бодеове карактеристике"*** може сагледати амплитудску и фазну карактеристику за функције преноса од улаза до излаза и од поремећаја до излаза.



Слика 4.4. Први екран апликације за синтезу регулатора серво система методом подешавања спектра полова

ДРУГИ ЕКРАН - КОРАК II

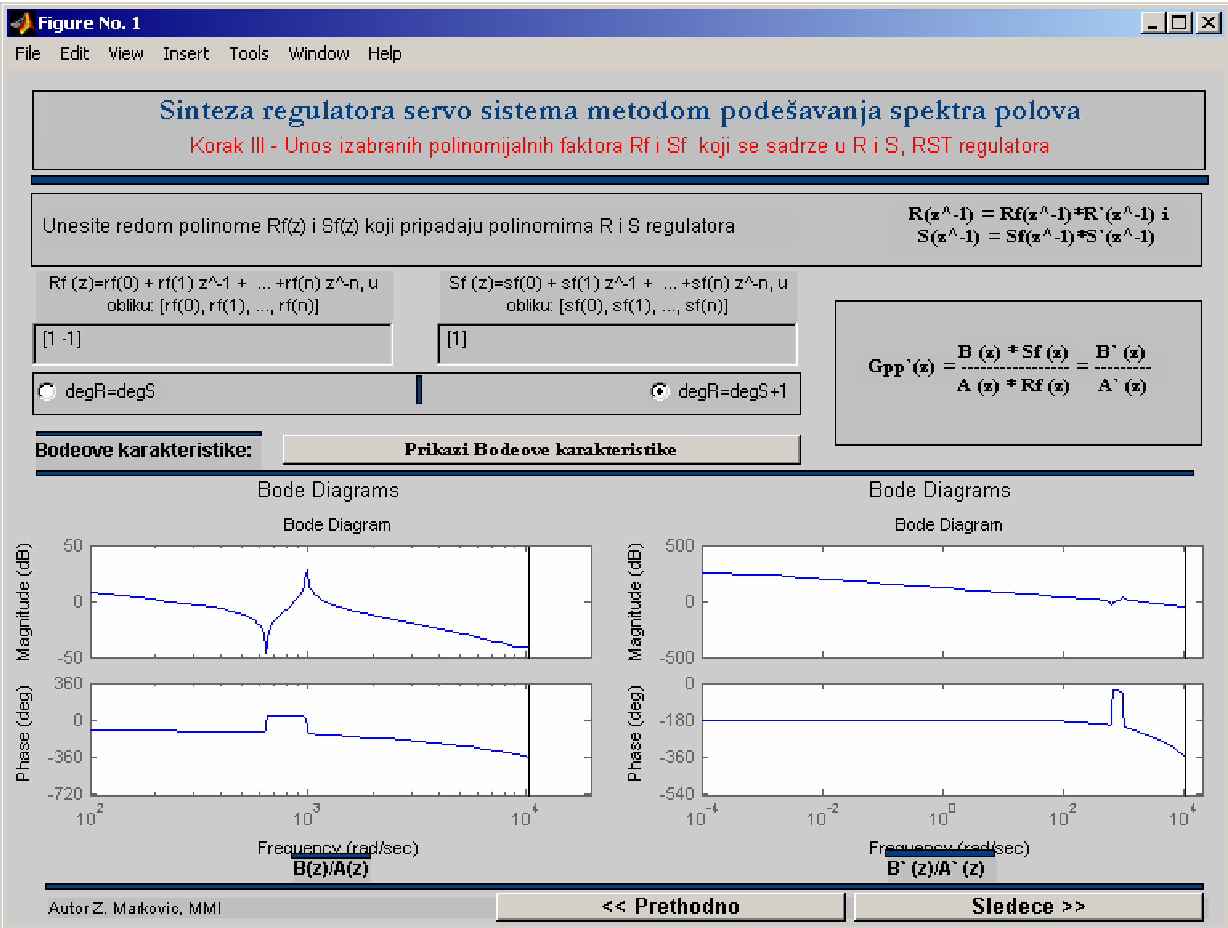
Други екран на који се стиже притиском дугмета ***“Следеће>>”*** на првом екрану, подразумева **корак II** алгоритма из одељка **4.1.** У оквиру овог екрана, корисник притиском на дугме ***“Прикажи нуле и полове објекта управљања”*** може сагледати нуле и полове објекта управљања у ***z*** координатној равни и на основу њих донети одлуку о евентуалном скраћивању неких нула објекта управљања. По донетој одлуци, у доњи **text box** може унети нуле полинома *B(z)* које се желе скратити, а потом притиском на дугме ***“Прикажи коефицијенте полинома B+(z) и B-(z) ->”*** може сагледати наведене полиноме.



Слика 4.5. Други екран апликације за синтезу регулатора серво система методом подешавања спектра полова

ТРЕЋИ ЕКРАН - КОРАК III, IV и V

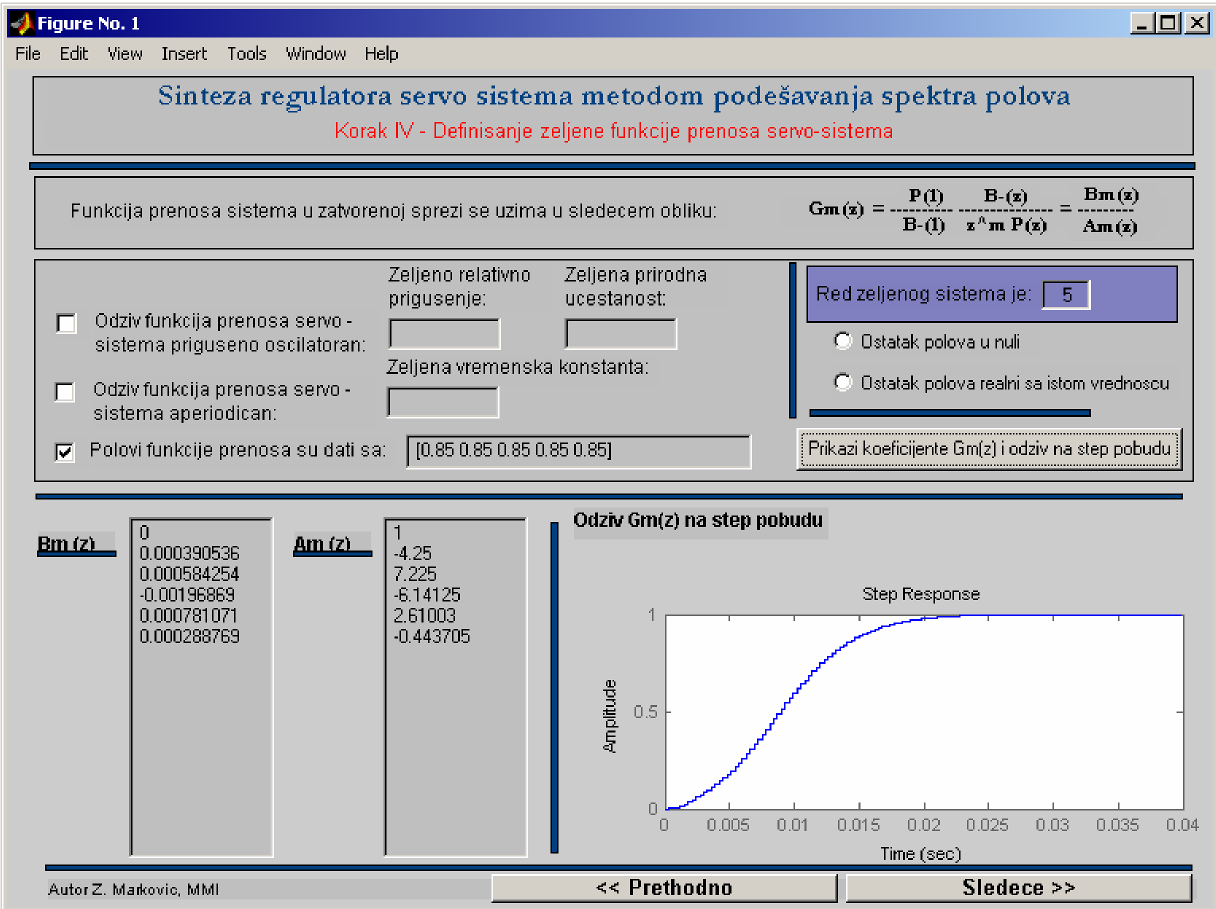
Трећи екран подразумева **кораке III**, **IV** и **V**, алгоритма из одељка **4.1.** У оквиру овог екрана, корисник уноси унапред изабране чиниоце $R_f(z)$ и $S_f(z)$, а потом врши избор реда полинома $R(z)$ "кликтањем" на одговарајући **radio button**. Потом притиском на дугме ***"Прикажи Бодеове карактеристике"*** може сагледати утицај унапред изабраних фактора полинома $R(z)$ и $S(z)$ на амплитудску и фазну карактеристику функције преноса од улаза до излаза и од поремећаја до излаза.



Слика 4.6. Трећи екран апликације за синтезу регулатора серво система методом подешавања спектра полова

ЧЕТВРТИ ЕКРАН - КОРАК VI

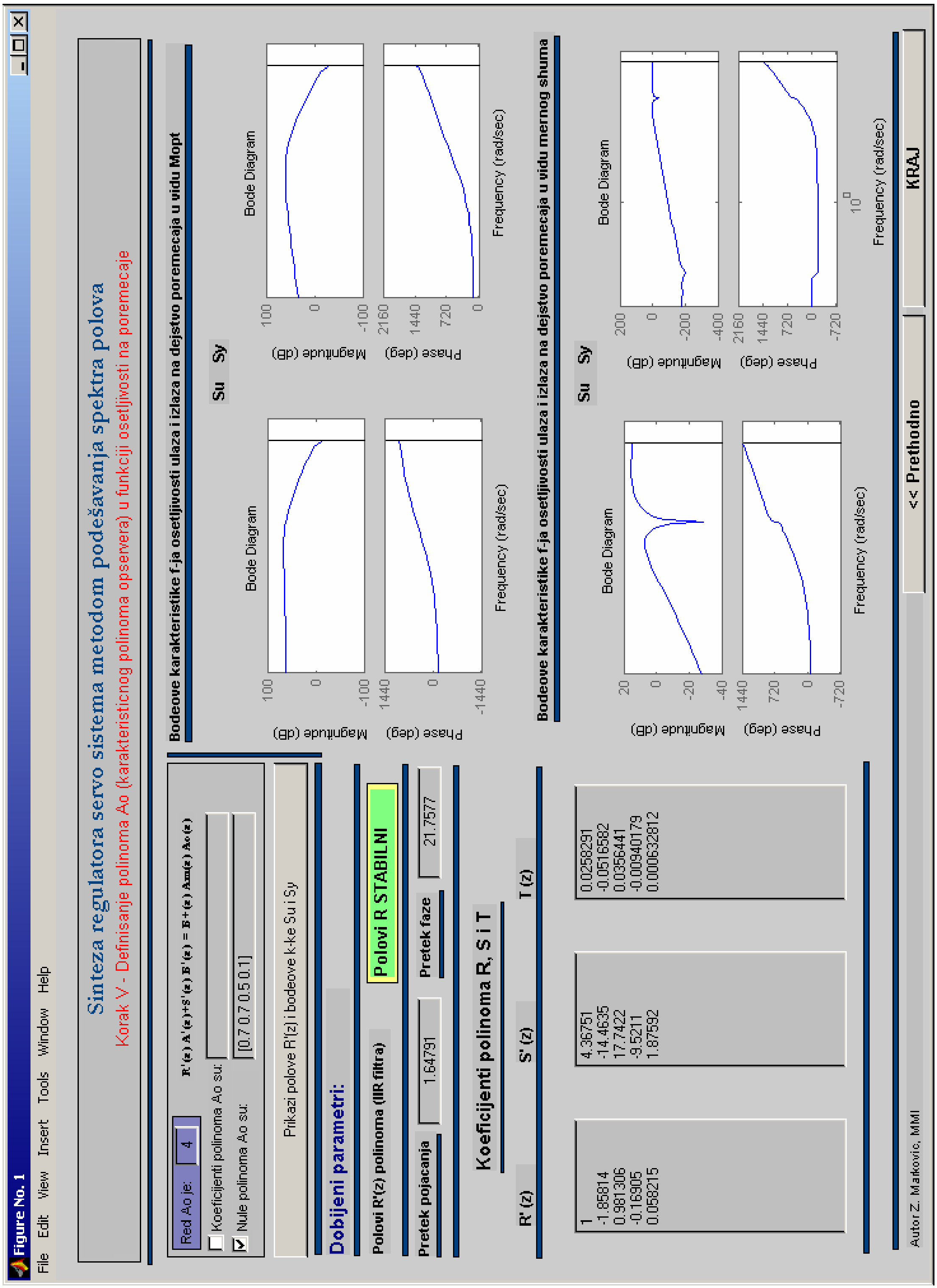
Четврти екран подразумева **корак VI** алгоритма из одељка **4.1.** У оквиру овог екрана, корисник комбинацијом одговарајућих **chek box**-ова, **radio button**-а и **text box**-ова дефинише жељену функцију преноса серво система у затвореној повратној спрези на начин како је описано кораком VI алгоритма у претходном одељку. По дефинисању параметара потребних за синтезу жељене функције преноса, корисник притиском на дугме ***"Прикажи коефицијенте Gm(z) и одзив на степ побуду"*** може сагледати одзив изабране функције преноса на јединични побудни сигнал хевисајдовог типа, као и коефицијенте полинома $B_m(z)$ и $A_m(z)$ изабране функције преноса система у затвореној повратној спрези $G_m(z) = B_m(z) / A_m(z)$.



Слика 4.7. Четврти екран апликације за синтезу регулатора серво система методом подешавања спектра полова

ПЕТИ ЕКРАН - КОРАК VII

Пети екран подразумева **корак VII** алгоритма из одељка **4.1.** У оквиру овог екрана, корисник уноси полином опсервера $A_o(z)$, а потом притиском на дугме ***"Прикажи полове R'(z) и бодеове к-ке Su и Sy"*** врши се прорачун коефицијената полинома *R(z)*, *S(z)* и *T(z)* регулатора, проверава се стабилност полинома *R(z),* врши се приказ амплитудску и фазну карактеристику функција осетљивости улаза и излаза на дејство поремећаја у облику момента оптерећења M_{opt} и мерног шума и врши се прорачун претека појачања и претека фазе за систем у затвореној спрези. Корисник процедуру понавља све док не буде задовољан добијеним парамтерима. Ово је уједно и последњи екран апликације.

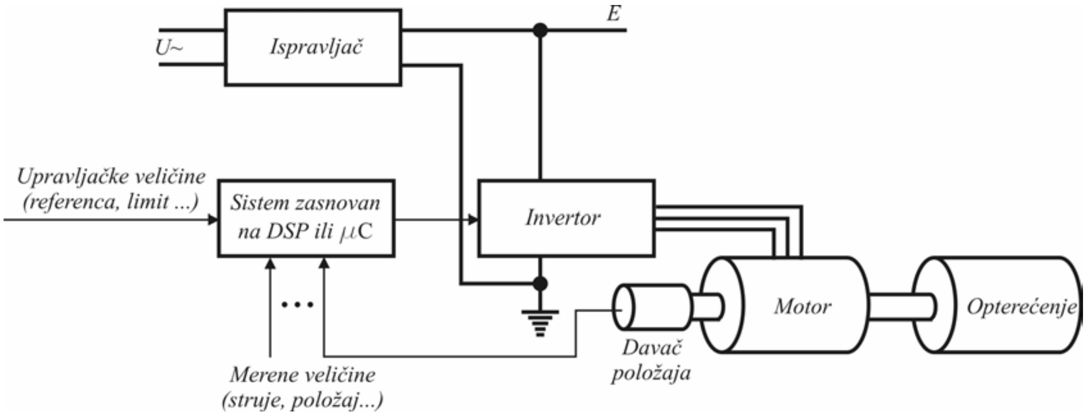


Слика 4.8. Пети екран апликације за синтезу регулатора серво система методом подешавања спектра полова

5 МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ СЕРВО ПОГОНА СА ЕЛАСТИЧНО СПРЕГНУТИМ МАСАМА

Препознавање и разумевање математичког модела серво погона је битно у процесу пројектовања дитигалног закона управљања једним оваквим системом. Стога ће у оквиру овог поглавља бити извршено извођење и детаљно описивање математичког модела серво погона погодног за коришћење у рачунарским симулацијама који је проистекао на основу теоријског разматрања и анализе појединих компоненти реалног серво погона високих перформанси са еластично спрегнутим масама, имајући у виду све аспекте као што су динамика актуатора, ограничена резолуција и динамика сензора на осовини.

На слици 5.1. приказан је блок дијаграм типичног серво погона са асинхроним мотором или синхроним мотором са перманентним магнетом (тзв. DC brushless motor).



Слика 5.1. Блок дијаграм серво погона са еластично спрегнтим масама

Према датој слици, могуће је препознати одређене целине које сачињавају један серво погон са асинхроним мотором или синхроним мотором са перманентним магнетом. У наредном делу овог поглавља биће извршена анализа тих целина у смислу извођења њихове функције преноса да би се њиховим обједињавањем на крају извела функција преноса читавог погона, погодна за потребе синтезе регулационе структуре и употребе у рачунарским симулацијама.

5.1 МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ ИНВЕРТОРА

Као актуатор електромагнетског момента у савременим серво системима са машинама наизменичне струје као извршним органом, користе се струјно регулисани напонски инвертори. Функција струјно регулисаног напонског инвертора је генерисање напона по фазама статора тако да статорске струје следе задате струјне референце које су резултат извршавања алгоритма индиректне векторске контроле (ИФОЦ) [7]. При довољно великом пропусном опсегу актуатора, развијени електромагнетски моменат у машини биће једнак захтеваном моменту.

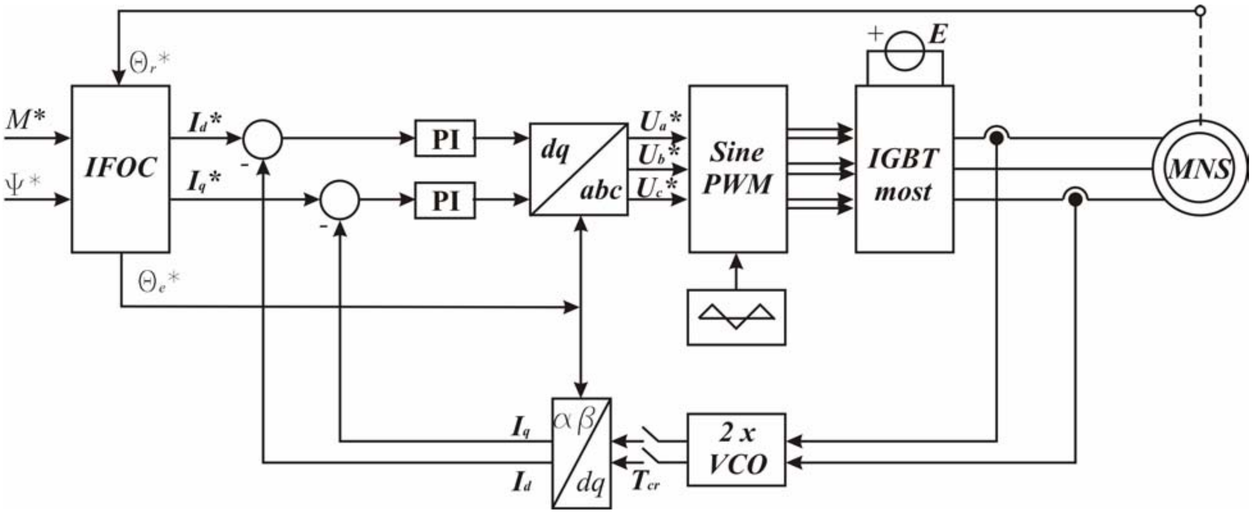
Струјно регулисане напонске инверторе у серво механизмима можемо класификовати према имплементираном регулатору струја. Први тип оваквих актуатора користи нелинеарну реглуацију са хистерезисним струјним регулатором. Ови актуатори се одликују великом брзином одзива и добром регулацијом статорских струја јер је струјна грешка једино ограничена ширином хистерезиса. За теоретски идеалну регулацију при којој не постоји грешка у регулисаној струји, неопходна је бесконачно велика учестаност комутација што физички није могуће, међутим уколико је ширина хистерезиса довољно мала, у математичком моделу серво система са оваквим актуатором, он се може сматрати идеалним. Лоша особина овог типа актуатора је што употреба хистерезисног струјног регулатора има за последицу променљиву радну учестаност прекидача у инверторском мосту, која зависи од индекса модулације и еквивалентне индуктивности расипања [7]. Наиме, услед променљиве учестаности рада прекидача, комутације у инверторском мосту нису стационарне у оквиру периоде излазног напона. При раду са нестационарним комутацијама, излазни напон инвертора садржи хармонике и субхармонике из широког опсега учестаности, па су електромагнетске сметње и бука јако изражени код ове топологије актуатора. Даље, зависност радне учестаности од еквивалентне индуктивности расипања мотора озбиљан је недостатак који може имати и нежељене последице. Наиме, ако је дужина напојног вода од инвертора до електричне машине већа од пројектоване, долази до смањења еквивалентне реактансе расипања услед паразитивне капацитивности напојног вода. Смањење еквивалентне реактансе расипања има за последицу повећање радне учестаности и стога веће загревање енергетских транзистора. У крајњем случају, услед велике дисипације снаге може доћи и до прегоревања енергетских транзистора. Из наведених разлога, све чешћа је употреба другог типа струјно регулисаних напонских инвертора са линеарним регулатором струја.

5.1.1 PWM инвертор са линеарним струјним регулатором

Проблеми везани за променљиву учестаност рада прекидача у инверторском мосту актуатора са хистерезисним струјним регулатором успешно се отклањају ако се за уобличавање статорских струја користи струјно вођени PWM инвертор. Подсетимо, технике PWM модулације користе носилац константне учестаности за поређење са референтним таласним обликом. На овај начин, таласни облици излазних напона и струја инвертора доминантно садрже више хармонике на учестаности ширинске модулације. У пракси, са брзим прекидачима снаге могуће је остварити учестаности PWM модулације које се налазе и изван границе аудио опсега. Осим тога, константном учестаношћу рада разрешава се и проблем синхронизације прекидача у инверторском мосту и олакшава пројектовање ЕМИ филтра.

У конфигурацији актуатора са PWM инвертором, за регулацију струје се користи линеарни струјни регулатор у синхроном координатном систему. У овом координатном систему, променљиве напона и струје узимају једносмерне вредности па је употребом линеарног струјног регулатора могуће остварити регулацију без статичке грешке, која је од пресудног значаја за тачност рада алгоритама векторске контроле.

На слици 5.2. приказан је блок дијаграм конфигурације са PWM инвертором и линеарном струјном регулацијом. Струјне референце I_d^* и I_q^* добијају се у алгоритму индиректне векторске контроле процесирањем референци момента M^* и флукса Ψ^*. Конвенционални пропорционално – интегрални (**PI**) закон управљања употребљен је за добијање *feed-forward* напонских референци U_d^* и U_q^*. Трансформацијом напонских референци U_d^* и U_q^* из синхроног у стационарни координатни систем добијају се напонске референце U_a^*, U_b^* и U_c^*. Као аргумент Блонделове обртне трансформације користи се угао θ_e. Тренутни положај синхроног *d-q* координатног система θ_e одређује се на основу тренутног положаја ротора θ_r и процењене вредности угла клизања θ_k. Напонске референце U_a^*, U_b^* и U_c^* се затим пореде са троугластим носиоцем како би се добили импулси за паљење прекидача у инверторском мосту.



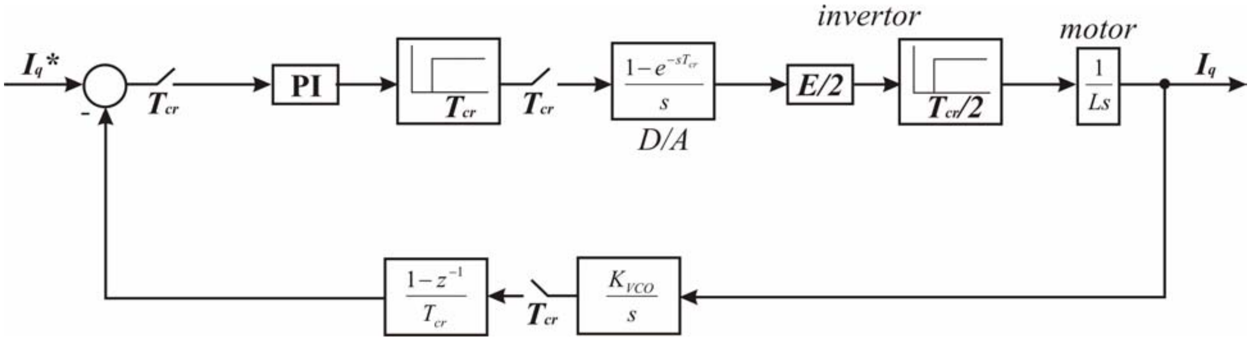
Слика 5.2. Блок дијаграм актуатора са PWM инвертором и линеарном струјном регулацијом

Затварање контуре струјне регулације по d и q осама, врши се мерењем статорских струја и њиховим уношењем у дигитални регулатор. У пракси, због постојања електромагнетског шума који генерише енергетски део, одбирци α и β компоненте статорске струје добијају се применом интегралне методе. За реализацију ове методе мерења потребан је систем од два напонски контролисана осцилатора (VCO) и два бројача. У овом случају се аналогни напони који су пропорционални α и β компонентама статорске струје доводе на улазе VCO конвертора. VCO конвертори генеришу импулсе који служе као такт за пуњење бројача. Како је учестаност ових импулса пропорционална вредностима сигнала на улазу у VCO конверторе, при сваком очитавању у бројачима ће се налазити вредности које су пропорционалне ампер - секундама струја које се мере. Одбирци α и β компоненте статорске струје добијају се као диференца садржаја ових бројача.

Примена линеарног закона управљања у регулацији статорских струја за собом повлачи извесна ограничења у погледу динамике одзива актуатора. Наиме, за усвојену периоду ширинске модулације T_{PWM}, периода одабирања струјног регулатора T_{cr} може узимати неку од вредности из скупа $T_{cr} = k \cdot T_{PWM}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Мање вредности немају смисла јер на струју статора не можемо да утичемо чешће него што то инвертор чини па је најповољнији случај $T_{cr} = T_{PWM}$. Очигледно, периода одабирања струјног регулатора је ограничена и зависи од избора прекидача у инвертору. У случају линеарног струјног регулатора, одзив на струјну грешку није тренутан, већ се одвија по експоненцијалном закону са динамиком која је функција пропусног опсега. Како је пропусни опсег линеарног струјног регулатора ограничен за дату периоду одабирања, тешко је говорити о "идеалном" актуатору већ је сасвим извесно да су његове перформансе коначне.

5.1.2 Математички модел актуатора

Да бисмо стекли увид у перформансе актуатора са линеарним струјним регулатором, неопходно је најпре формирати његов динамички модел. Типично, флукс у електричној машини је константан па се захтевани електромагнетски момент остварује манипулацијом попречне компоненте статорске струје. У том случају, модел актуатора своди се на модел контуре струјне регулације за q-осу, као што је приказано на слици 5.3.



Слика 5.3. Модел контуре струјне регулације за q осу

Размотримо прво последице одлагања у инвертору и процесору које резултују транспротним кашњењем. Наиме, због природе ширинске модулације (усредњавање), излазни напон инвертора касни за половину периоде PWM модулације у односу на референтни таласни облик напона на улазу. Ако усвојимо да је $T_{cr} = T_{PWM}$, одлагање у инвертору моделовано је транспортним кашњењем $T_{cr}/2$. Израчунавања у процесору су комплексна због обртне трансформације тако да се управљачки сигнали примењују тек у наредној периоди одабирања. Ово одлагање моделовано је транспортним кашњењем T_{cr}. Такође, претпоставља се да је поремећај у виду индуковане електромоторне силе статора споропроменљив у односу на динамику одзива струјног регулатора. У том случају, конвенционални **PI** регулатор омогућиће праћење референтног улаза без статичке грешке.

Параметре **PI** регулатора лако можемо подесити ако претходно транспортна кашњења у инвертору и процесору моделујемо одговарајућим временским кашњењима првог реда. За мале вредности периоде одабирања T_{cr} можемо узети да је:

$$\exp(-sT_{cr}) \approx \frac{1}{1+sT_{cr}}, \tag{5.1}$$

односно,

$$\exp\left(-s\frac{T_{cr}}{2}\right) \approx \frac{1}{1+s\dfrac{T_{cr}}{2}}. \tag{5.2}$$

У том случају, транспортна кашњења у инвертору и процесору можемо моделовати еквивалентним временским кашњењем првог реда

$$W_d(s) = \frac{1}{1+sT_d}, \tag{5.3}$$

где је T_d, доминантна временска константа.

<u>Доминантна временска константа.</u> Посматрајмо функцију континуалног преноса са n реалних полова облика

$$W_n(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+s\tau_i)}. \tag{5.4}$$

Потребно је дакле наћи учестаност $\omega_d = 1/\tau_d$ при којој функција континуалног преноса (5.4) има слабљење 3 dB. Овај захтев може се исказати једначином:

$$\left|\prod_{i=1}^{n}(1+s\tau_i)\right| = \sqrt{2}. \tag{5.5}$$

Случај $n = 2$: Из једначине (5.5) добијамо:

$$\left|1-\omega^2\tau_1\tau_2 + j\omega(\tau_1+\tau_2)\right| = \sqrt{2}, \tag{5.6}$$

одакле закључујемо да је доминантна временска константа дата изразом:

$$\omega_d^2 = \frac{1}{\tau_d^2} = \frac{-(\tau_1^2+\tau_2^2)+\sqrt{\tau_1^4+\tau_2^4+6\cdot\tau_1^2\cdot\tau_2^2}}{2\cdot\tau_1^2\cdot\tau_2^2}. \tag{5.7}$$

Ако усвојимо претпоставку да је производ временских константи τ_1 и τ_2 много пута мањи од збира истих, тада се може написати следећа једнакост:

$$\omega_d = \lim_{\tau_1\cdot\tau_2\to 0}\frac{-(\tau_1^2+\tau_2^2)+\sqrt{\tau_1^4+\tau_2^4+6\cdot\tau_1^2\cdot\tau_2^2}}{2\cdot\tau_1^2\cdot\tau_2^2} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}} \tag{5.8}$$

Случај $n = 3$: Из једначине (5.5) добијамо:

$$\left|1-\omega^2(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)+j\omega(\tau_1+\tau_2+\tau_3)\right| = \sqrt{2}, \tag{5.9}$$

одакле закључујемо да је доминантна временска константа дата изразом:

$$\omega_d = \frac{1}{\tau_d} \approx \frac{1}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}}. \tag{5.10}$$

Може се показати да је доминантна временска константа у случају функције континуалног преноса са n реалних полова дата изразом:

$$\omega_d = \frac{1}{\tau_d} \approx \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2}}. \tag{5.11}$$

Дакле, функцију континуалног преноса са n реалних полова можемо моделовати еквивалентним временским кашњењем првог реда:

$$W_1(s) = \frac{1}{1+s\tau_d}, \tag{5.12}$$

где је τ_d доминантна временска константа дата изразом (5.11).

Доминантну временску константу T_d којом моделујемо транспортна кашњења у контури струјне регулације сада је лако одредити. Применом израза (5.8) за случај функција преноса (5.1) и (5.2) добијамо:

$$T_d = \sqrt{T_{cr}^2+(T_{cr}/2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}T_{cr}. \tag{5.13}$$

С обзиром да су добијени полови реални и једнаки, пропусни опсег актуатора може се проценити на основу израза:

$$f_{bw}^{cr}[Hz] = \frac{1}{2\pi T_{cr}}\ln\frac{1}{\sigma_{opt}^{cr}} = \frac{0.0396}{T_{cr}[s]}. \tag{5.14}$$

У реалним системима, у зависности од типа употребљених прекидача у мосту инвертора могуће је остварити учестаности ширинске модулације од 5 kHz до 15 kHz. Заменом ових вредности у израз (5.14) уз услов да је $T_{cr} = T_{PWM}$ добијамо да пропусни опсег актуатора са PI регулатором струје и PWM инвертором узима вредности из опсега 198 Hz до 594 Hz.

Очигледно, пропусни опсег актуатора са линеарним струјним регулатором је коначан и мора се узети у обзир приликом оптимизације линеарног режима надређене брзинске петље. Из тог разлога, актуатор треба моделовати временским кашњењем првог реда

$$W_{em}(s) = \frac{1}{1+\tau_{em}s}, \tag{5.15}$$

где је τ_{em} доминантна временска константа актуатора.

Доминантну временску константу актуатора τ_{em} можемо проценити на основу спектра полова контуре струјне регулације у *z*-равни. Применом израза (5.10) за случај троструког реалног пола у тачки σ_{opt} добијамо:

$$\tau_{em}[s] = \frac{\sqrt{3}}{\ln\frac{1}{\sigma_{opt}}} T_{cr} = 6.95 \cdot T_{cr}[s]. \tag{5.16}$$

Израз (5.16) показује да постоји линеарна зависност између брзине одзива актуатора и периоде одабирања регулатора струје односно учестаности PWM модулације. У општем случају, доминантну временску константу актуатора могуће је проценити применом неке од метода за идентификацију параметара механичког подсистема.

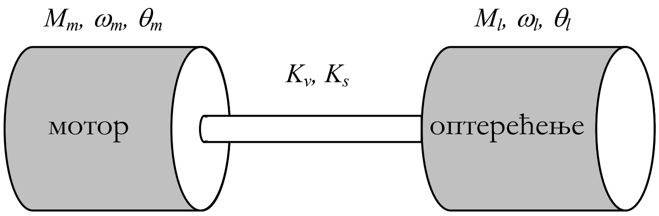
5.2 Математички модел механичког подсистема

Механички подсистем у једном серво погону представља ротор мотора наизменичне струје који је повезан са оптерећењем. Уколико се може сматрати да је ротор мотора наизменичне струје круто повезан са обртним делом радне машине или оптерећења, такав механички подсистем може се еквивалентирати ротором са већим моментом инерције уз постојање отпорног момента најчешће зависног од брзине обртања [55]. У том случају се једначина кретања своди на једнакост момента изазваног променом кинетичке енергије обртних маса са разликом електромагнетског момента и момента оптерећења. Ипак нагласимо да ову идеализацију можемо користити само у стационарним стањима или у споропроменљивим прелазним режимима уз претпоставку да се динамика електричних прелазних процеса може занемарити.

У циљу детаљније анализе, потребно је разматрати систем са дистрибуираним масама и флексибилном везом између њих. Наиме, код реалних серво система, ротор погонског мотора је повезан са оптерећењем преко еластичне осовине и спојнице, тј. елементима чија крутост није бесконачна. Приликом рада мотора долази до увртања осовине, па различити делови механичког подсистема имају различите брзине и убрзања. Ово има за последицу различите промене кинетичких енергија обртних маса, па долази до појаве осцилаторних момената који изазивају значајне разлике између електромагнетског и отпорног момента. Тренутне вредности ова два момента се разликују због момената насталих услед трења, као и момената у вратилу услед торзије тј. увртања осовине. Код мотора великих снага, у прелазним режимима која настају због наглих промена момента оптерећења или задавања нове референтне вредности брзине може доћи до великих промена разматраних момената што може довести и до лома осовине или спојних делова. У овом случају моменти услед торзије и трења се не могу приказати преко линеарних функција брзине и положаја преко одговарајућих коефицијената торзије и трења. Код мотора малих снага, који раде у номиналним условима, ове коефицијенте можемо сматрати линеарним. Посебно значајан утицај код брзинских сервомеханизама има електромеханичка резонанција која настаје због подударања фреквенције из електричног управљачког сигнала мотора са природном фреквенцијом механичког подсистема. Такође се може јавити и механичка резонанција када се фреквенција обртања изједначи са неком од природних механичких фреквенција.

5.2.1 Математички модел механичког подсистема серво система са дистрибуираним масама

На слици 5.4. приказан је најчешћи случај у пракси, мотор оптерећен оптерећењем спојеним са ротором мотора преко осовине и спојнице коначног коефицијента торзије.



Слика 5.4. Механички подсистем мотор – оптерећење

Механички подсистем са слике је описан следећим диференцијалним једначинама:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = M_{em} - K_v\left(\frac{d\theta_m}{dt} - \frac{d\theta_l}{dt}\right) - K_s\left(\theta_m - \theta_l\right), \tag{5.17}$$

$$J_l \frac{d^2\theta_l}{dt^2} = K_s\left(\theta_m - \theta_l\right) + K_v\left(\frac{d\theta_m}{dt} - \frac{d\theta_l}{dt}\right) - M_l, \tag{5.18}$$

$$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}, \tag{5.19}$$

$$\omega_l = \frac{d\theta_l}{dt}, \tag{5.20}$$

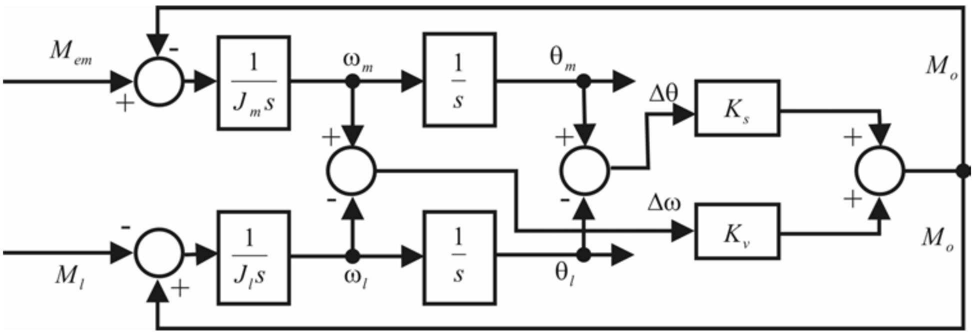
где су:

- J_m и J_l респективно, моменти инерције мотора и оптерећења;
- K_v коефицијент вискозног трења (фрикције);
- K_s коефицијент крутости осовине;
- M_{em} електромагнетски моменат мотора;
- M_l механички моменат оптерећења
- θ_m и θ_l респективно, позиције осовине на месту мотора и оптерећења, и
- ω_m и ω_l угаоне брзине осовине на месту мотора и оптерећења, респективно.

Лапласовом трансформацијом и решавањем једначина, долази се до блок дијаграма, који је приказан на слици 5.5.

Може се рећи да се угаона брзина ω_m и позиција θ_m осовине мотора углавном разликују од угаоне брзине ω_l и позиције θ_l осовине оптерећења. Систем који сачињавају мотор-осовина-оптерећење је највећим делом пригушен вискозним трењем $K_v \cdot (\omega_m(s) - \omega_l(s))$. Наиме, коефицијент трења K_v у већини случајева подразумева мале вредности што појачава слабо пригушене механичке осцилације. У блок дијаграму се уочава торзиони моменат M_o који је у стационарном стању једнак моменту оптерећења M_l. У прелазним режимима када се разликују брзина мотора и оптерећења, овај моменат је дат следећим изразом:

$$M_o(s) = K_s \cdot (\theta_m(s) - \theta_l(s)) + K_v \cdot (\omega_m(s) - \omega_l(s)). \tag{5.21}$$



Слика 5.5. Блок дијаграм серво система са еластично спрегнутим масама

На основу претходног одређују се функције преноса између положаја осовине мотора и положаја осовине оптерећења и електромагнетског момента мотора и момента оптерећења, на следећи начин:

$$\begin{aligned}\theta_m(s) = {} & \frac{J_l \cdot s^2 + K_v \cdot s + K_s}{s^2 \cdot (J_m J_l \cdot s^2 + (J_m + J_l) \cdot (K_v \cdot s + K_s))} \cdot M_{em}(s) \\ & - \frac{K_v \cdot s + K_s}{s^2 \cdot (J_m J_l \cdot s^2 + (J_m + J_l) \cdot (K_v \cdot s + K_s))} \cdot M_l(s)\end{aligned}, \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}\theta_l(s) = {} & \frac{K_v \cdot s + K_s}{s^2 \cdot (J_m J_l \cdot s^2 + (J_m + J_l) \cdot (K_v \cdot s + K_s))} \cdot M_{em}(s) \\ & - \frac{J_m \cdot s^2 + K_v \cdot s + K_s}{s^2 \cdot (J_m J_l \cdot s^2 + (J_m + J_l) \cdot (K_v \cdot s + K_s))} \cdot M_l(s)\end{aligned}. \tag{5.23}$$

Такође, могу се одредити и функције преноса између угаоне брзине осовине мотора и угаоне брзине осовине оптерећења и електромагнетског момента мотора и момента оптерећења, на следећи начин:

$$\begin{aligned}\omega_m(s)=&\frac{1}{(J_m+J_l)\cdot s}\cdot\frac{\dfrac{J_l}{K_s}\cdot s^2+\dfrac{K_v}{K_s}\cdot s+1}{\dfrac{J_mJ_l}{K_s\cdot(J_m+J_l)}s^2+\dfrac{K_v}{K_s}\cdot s+1}\cdot M_{em}(s)\\&-\frac{1}{(J_m+J_l)\cdot s}\cdot\frac{\dfrac{K_v}{K_s}\cdot s+1}{\dfrac{J_mJ_l}{K_s\cdot(J_m+J_l)}s^2+\dfrac{K_v}{K_s}\cdot s+1}\cdot M_l(s)\end{aligned}, \qquad (5.24)$$

односно:

$$\begin{aligned}\omega_m(s)=&\frac{1}{(J_m+J_l)\cdot s}\cdot\frac{\dfrac{1}{\omega_z^2}\cdot s^2+\dfrac{2\zeta_z}{\omega_z}\cdot s+1}{\dfrac{1}{\omega_p^2}s^2+\dfrac{2\zeta_p}{\omega_p}\cdot s+1}\cdot M_{em}(s)\\&-\frac{1}{(J_m+J_l)\cdot s}\cdot\frac{\dfrac{2\zeta_z}{\omega_z}\cdot s+1}{\dfrac{1}{\omega_p^2}s^2+\dfrac{2\zeta_p}{\omega_p}\cdot s+1}\cdot M_l(s)\end{aligned}, \qquad (5.25)$$

У случају функције преноса између угаоне брзине осовине оптерећења и електромагнетског момента мотора и момента оптерећења, има се слично горњем:

$$\begin{aligned}\omega_l(s)=&\frac{1}{(J_m+J_l)\cdot s}\cdot\frac{\dfrac{K_v}{K_s}\cdot s+1}{\dfrac{J_mJ_l}{K_s\cdot(J_m+J_l)}s^2+\dfrac{K_v}{K_s}\cdot s+1}\cdot M_{em}(s)\\&-\frac{1}{(J_m+J_l)\cdot s}\cdot\frac{\dfrac{J_m}{K_s}\cdot s^2+\dfrac{K_v}{K_s}\cdot s+1}{\dfrac{J_mJ_l}{K_s\cdot(J_m+J_l)}s^2+\dfrac{K_v}{K_s}\cdot s+1}\cdot M_l(s)\end{aligned}, \qquad (5.26)$$

односно:

$$\begin{aligned}\omega_l(s)=&\frac{1}{(J_m+J_l)\cdot s}\cdot\frac{\dfrac{2\zeta_z}{\omega_z}\cdot s+1}{\dfrac{1}{\omega_p^2}s^2+\dfrac{2\zeta_p}{\omega_p}\cdot s+1}\cdot M_{em}(s)\\&-\frac{1}{(J_m+J_l)\cdot s}\cdot\frac{\dfrac{1}{\omega_z^2}\cdot s^2+\dfrac{2\zeta_z}{\omega_z}\cdot s+1}{\dfrac{1}{\omega_p^2}s^2+\dfrac{2\zeta_p}{\omega_p}\cdot s+1}\cdot M_l(s)\end{aligned}, \qquad (5.27)$$

У изразима (5.25) и (5.27) непригушене природне учестаности ω_p и ω_z, као и коефицијенти релативног пригушења ζ_p и ζ_z, су дати следећим изразима:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K_s \cdot (J_m + J_l)}{J_m J_l}}\,, \tag{5.28}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_s}{J_l}}\,, \tag{5.29}$$

$$\zeta_p = \sqrt{\frac{K_v^2 \cdot (J_m + J_l)}{4K_s J_m J_l}}\,, \tag{5.30}$$

$$\zeta_z = \sqrt{\frac{K_v^2}{4K_s J_l}}\,. \tag{5.31}$$

Непригушене природне учестаности ω_p и ω_z које су дате изразима (5.28) и (5.29) су према [34] дефинисане као резонантна (ω_p) и антирезонантна (ω_z) учестаност, док је њихов коефицијент познат као резонантни однос:

$$R_r = \frac{\omega_p}{\omega_z} = \sqrt{1 + \frac{J_l}{J_m}}\,. \tag{5.32}$$

5.3 Мерење положаја осовине мотора

Апликације сервомеханизама брзине или положаја високих перформанси захтевају даваче (сензоре) положаја осовине мотора велике прецизности. У пракси се најчешће користе два типа оваквих давача: оптички енкодери (који могу бити апсолутни или инкрементални) и електромагнетни ризолвер са синхроконвертором.

5.3.1 Оптички енкодер

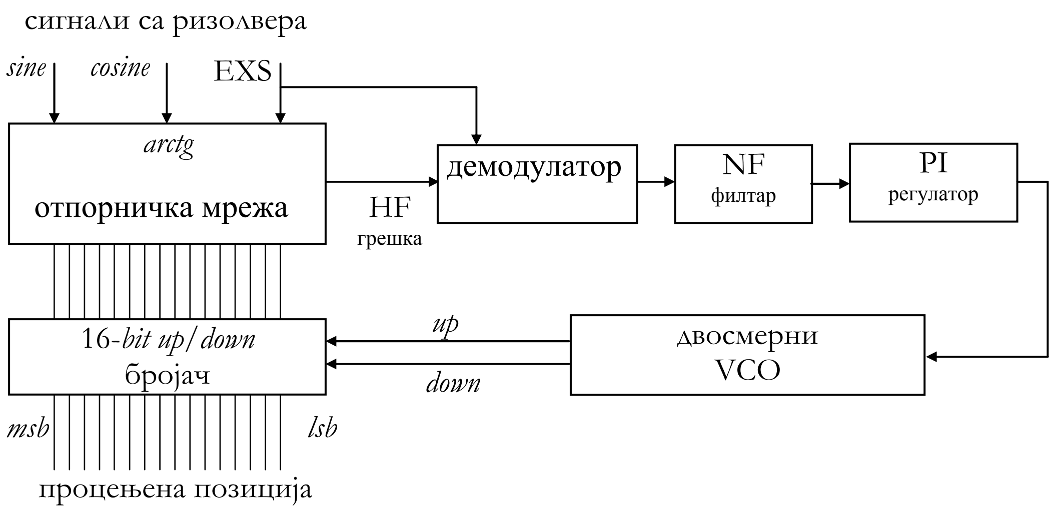
Код оптичких давача информација о положају осовине је у својој природи дигитална, што је њихова несумњива предност над давачима аналогног типа. Тако, код апсолутних оптичких енкодера, положај осовине мотора се добија непосредним очитавањем кодоване позиције са диска. За кодовање се најчешће користи Грејов или бинарно циклични код у коме се кодоване вредности било која два суседна броја разликују само у једном биту. На тај начин, смањује се грешка у детекцији угла која може бити највише један прираштај детектоване величине. Детектована вредност се пре довођења у процесор мора превести из бинарно цикличног у обичан бинарни код.

Инкрементални оптички енкодер опремљен је прозрачним диском на коме су густо нанети непрозрачни еквидистантни маркери. За очитавање маркера користи се светлосни детектор. У току обртања диска, читач маркера генерише поворку импулса која пуни двосмерни бројач. Сваком импулсу инкременталног енкодера одговара прираштај угла од једног кванта. На овај начин, приликом сваког очитавања, у бројачу се налази дигитални еквивалент инкремента позиције. Сабирањем сукцесивних вредности бројача добија се дигитални еквивалент положаја који се мери.

Предности инкременталног у односу апсолутни оптички енкодер су бројне, па се он по правилу користи као давач у серво системима високих перформанси. Пре свега, за ову врсту енкодера не постоји ограничење у погледу брзине обртања диска. Резолуција мерења је знатно већа и ограничена је само ширином прозирних зазора на диску. Такође, импулси који стижу са енкодерских фаза могу се уз употребу capture/compare бројачког система у микроконтролеру употребити за реализацију различитих метода мерења брзине, чиме се додатно повећава резолуција мерења брзине. Ипак, и поред бројних позитивних особина, инкрементални енкодер као и остали оптички енкодери има и једну јако изражену слабост. Наиме, индустријско окружење давача, које често подразумева присуство уљних пара, прашине, маханичке вибрације и повишене температуре, онемогућава правилан рад инкременталног енкодера. У таквом окружењу, као давач редовно се користи робусни електромагнетни ризолвер са синхроконвертором.

5.3.2 Електромагнетни ризолвер са синхроконвертором

Електромагнетни ризолвер има форму електричне машине која укључује обртни трансформатор и детекциони комплет који чине синусни и косинусни детекциони намотаји. Приликом обртања осовине мотора, услед високофреквентне побуде на ротору (EXS) на детекционим намотајима се индукују аналогни напони у облику синусоиде, односно косинусоиде. Амплитуде и фазе ових напона садрже информацију о положају осовине мотора. Применом рациометријске методе [25], у синхроконвертору се на основу синусног и косинусног сигнала добија естимирана позиција у дигиталном облику. Естимирана позиција се налази у двосмерном up/down бројачу у форми дигиталне речи са 10, 12, 14 или 16-битном тачношћу.



Слика 5.6. Унутрашња структура синхроконвертора.

Отпорничка **arctg** мрежа на улазу је тако организована да се на њеном излазу појављује високофреквентни сигнал грешке (HF грешка). Ова грешка је пропорционална разлици између стварне и естимиране позиције која се у дигиталном облику налази у бројачу. Високофреквентни сигнал грешке се прво демодулише а затим пропушта кроз филтар пропусник ниских учестаности, чиме се из сигнала одстрањује шум високих учестаности. Добијени аналогни сигнал је пропорционалан разлици стварне и естимиране позиције, и као такав се уводи у пропорционално-интегрални регулатор. Сигнал добијен на излазу из регулатора води се на улаз двосмерног напонски контролисаног осцилатора (BVCO). Импулси генерисани на излазу BVCO конвертора служе као такт за пуњење 16-битног бројача, чиме се обезбеђује корективно дејство које присиљава естимовану позицију да следи стварни положај осовине мотора. Треба истаћи да је синхроконвертор непотпун као опсервер. Као што је познато, опсервер има два улаза; један командни и један улаз за корективно дејство. Како корективно дејство у форми убрзања недостаје, синхроконвертор уноси кашњење у сигнал повратне спреге.

Математички модел

Према подацима произвођача [56], функција спрегнутог континуалног преноса синхроконвертора гласи

$$\frac{\theta_{out}}{\theta_{in}}(s_N) = \frac{14(1+s_N)}{(s_N+2.4)(s_N^2+3.4s_N+5.8)}, \tag{5.33}$$

где је, $\mathrm{s_N}$ оператор Лапласове трансформације нормализован у односу на граничну учестаност пропусног опсега синхроконвертора $\mathrm{f_{BW}}$,

$$s_N = \frac{2}{\pi}\frac{s}{f_{BW}}. \tag{5.34}$$

Гранична учестаност синхроконвертора $\mathrm{f_{BW}}$ подешава се избором елемената за програмирање овог кола, и налази се у опсегу од 520 Hz до неколико kHz. За изабрану вредност пропусног опсега, за модел синхроконвертора усвајамо временско кашњење првог реда:

$$W_{rd}(s) = \frac{1}{1+\tau_{rd}s}, \tag{5.35}$$

где је τ_{rd} доминантна временска константа синхроконвертора.

Доминантну временску константу синхроконвертора можемо проценити из израза (5.33) ако претходно елиминишемо коначну нулу а затим редукујемо степен полинома у имениоцу. Тада добијамо:

$$\frac{\theta_{out}}{\theta_{in}}(s_N) \approx \frac{14}{(s_N+2.4)(3.4s_N+5.8)}. \tag{5.36}$$

Израз (5.36) може се преписати у облику:

$$\frac{\theta_{out}}{\theta_{in}}(s_N) \approx \frac{14/13.92}{(\tau_{1n}s_N+1)(\tau_{2n}s_N+1)}, \tag{5.37}$$

где су $,\tau_{\mathrm{1n}} = 1/2.4,\ \tau_{\mathrm{2n}} = 3.4/5.8$, нормализоване временске константе.

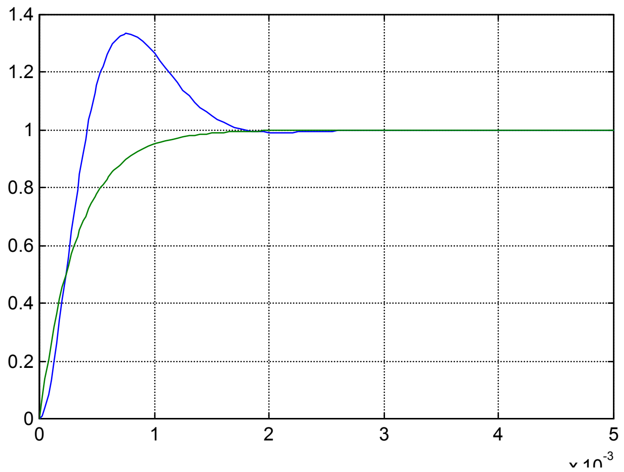
Применом израза (5.8), нормализована доминантна временска константа синхро-конвертора износи:

$$\tau_{rdn} = \sqrt{\tau_{1n}^2+\tau_{2n}^2} = 0.7192. \tag{5.38}$$

Коначно, применом израза (5.34), доминантна временска константа синхро-конвертора гласи

$$\tau_{rd}[\mathrm{s}] = \tau_{rdn}\frac{2}{\pi\cdot f_{BW}[\mathrm{Hz}]} = \frac{0.4578}{f_{BW}[\mathrm{Hz}]}. \tag{5.39}$$

Ефекат моделовања функције континуалног преноса (5.33) еквивалентним временским кашњењем првог реда илустрован је симулацијом на дигиталном рачунару за случај синхроконвертора пропусног опсега $\mathrm{f}_{\mathrm{BW}} = 1kHz$.



Слика 5.7. Одскочни одзиви синхроконвертора и еквивалентног кола првог реда

На основу симулације синхроконвертор се мења колом првог реда временске константе за коју ће то коло достићи 50% референтне вредности као што га постиже и коло синхроконвертора. Закључује се да је та временска константа: $\tau_{rd} = 330\,\mu s$.

5.3.3 Шум у сигналу повратне спреге

Осим кашњења, у сигналу повратне спреге брзинског серво система присутан је као последица ограничене резолуције синхроконвертора, и квантизациони шум. Означимо са N - број бита бројача употребљених за мерење положаја осовине мотора. У том случају, резолуција мерења положаја износи:

$$\Delta\theta\left[rad\right] = \frac{2\pi}{2^N}. \tag{5.40}$$

У зависности од тога како добијамо процену брзине обртања вратила, сигнал процењене брзине биће мање или више контаминиран шумом. У случају најједноставнијег метода естимације брзине - диференцирањем положаја, резолуција мерења брзине износиће:

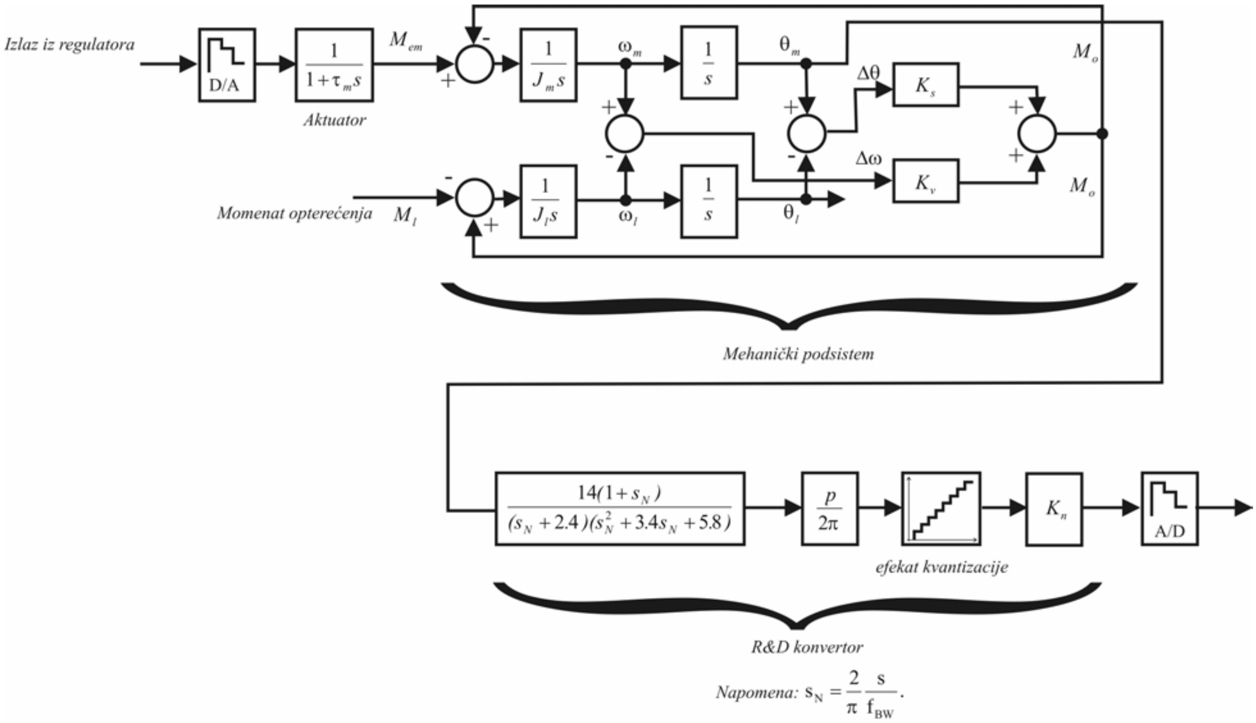
$$\Delta\omega[\mathrm{rad/s}] = \frac{\Delta\theta}{T} = \frac{2\pi}{2^N T}, \tag{5.41}$$

где T означава периоду одабирања регулатора брзине.

Као последица постојања овог шума, јавиће се нежељени шум у управљачкој променљивој, што се у случају брзинског серво система, манифестује као нежељене флуктуације ("рипл") у моменту. У зависности од шума $\Delta\omega$, као и функције преноса од ове променљиве до управљачке променљиве, биће дефинисана и ширина појаса у којој ће управљачка променљива, тј. моменат принудно осциловати.

5.4 МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ СЕРВО ПОГОНА

Као резултат претходних разматрања, на слици 5.8 дат је блок дијаграм математичког модела целокупног серво погона високих перформанси са еластично спрегнутим масама, који је погодан за коришћење у рачунарским симулацијама.



Слика 5.8. Блок дијаграм математичког модела серво погона

6 СИНТЕЗА РЕГУЛАТОРА БРЗИНЕ СЕРВО ПОГОНА СА ЕЛАСТИЧНО СПРЕГНУТИМ МАСАМА МЕТОДОМ ПОДЕШАВАЊА ПОЛОВА

У оквиру трећег поглавља описана је синтеза регулатора методом подешавања полова коришћењем полиномијалних једначина. У оквиру истог поглавља дате су неке од смерница које треба следити у пракси при пројектовању регулатора методом подешавања полова. У оквиру петог поглавља, изведен је и детаљно описан математички модел који је проистекао на основу теоријског разматрања и анализе појединих компоненти реалног серво погона високих перформанси са еластично спрегнутим масама, који је погодан за коришћење у рачунарским симулацијама. На основу датих разматрања у оквиру овог поглавља биће извршена анализа и синтеза регулатора брзине серво погона са еластично спрегнутим масама користећи се методом подешавања полова, а на конкретном примеру серво погона. На нивоу рачунарских симулација кроз конкретне конфигурације погона биће анализиран утицај појединих карактеристичних параметара на стабилност система у затвореној повратној спрези. Такође, кроз извршене рачунарске симулације биће приказане перформансе регулатора добијеног методом подешавања полова и упоредиће се његове карактеристике са стандардним регулатором пропроционално-интегралног типа (**PI** регулатор). Све рачунарске симлације су извршене у **"Simulink"**-у, а одговарајући фајлови (**.mdl*) су дати на дискети која се налази у прилогу овог магистарског рада.

6.1 МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ СЕРВО ПОГОНА

Сви прорачуни у оквиру овог погона биће засновани на моделу серво погона који се састоји од два синхрона мотора са перманентним магнетом са уграђеним електромагнетним ризолвером на осовини као давачем положаја. Дати мотори су механички спрегнути преко еластичне осовине. Мотори се могу управљати независно и користе се као мотор и оптерећење. На располагању су еластичне осовине различитих пресека, чијом се изменом може мењати коефицијент крутости, као и инерцијални дискови који се могу постављати на осовину мотора и оптерећења, чиме се може мењати однос момената инерције мотора и оптерећења. Карактеристике мотора, ризолвера са синхроконвертором, актуатора (петље струјне регулације), еластичне осовине и инерцијалних дискова, релевантних за параметре математичког модела који је приказан сликом 5.8., су следеће:

<u>**Подаци о мотору:**</u>

- називна снага $P_{nom} = 1{,}49\ kW$,
- номинална брзина $\omega_{nom} = 3000\ r/\min$,
- номинални момент $T_{nom} = 5{,}7\ N \cdot m$,
- максимални момент $T_{\max} = 24\ N \cdot m$,
- момент инерције (укључујући и ризолвер) $J = 0{,}00062\ kg \cdot m^2$,

<u>**Подаци о ризолверу и синхроконвертору:**</u>

- број пари полова ризолвера $p = 4$,
- дужина регистра 16 бита,
- пропусни опсег $f_{bw} = 1\ kHz$,

<u>**Подаци о актуатору (инвертор):**</u>

- временска константа актуатора $\tau_{em} = 0.0005$,

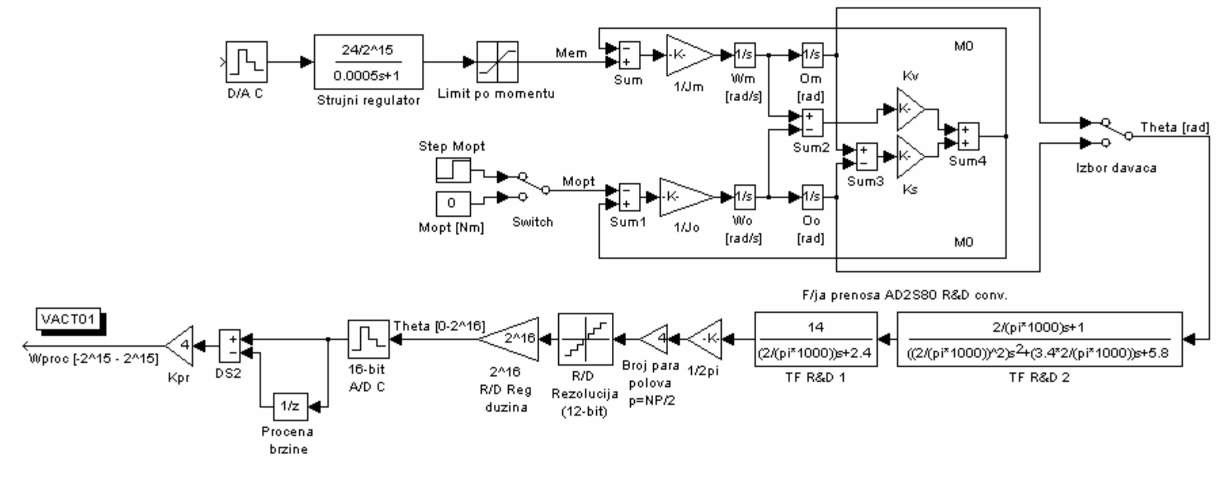
Подаци о еластичној осовини:

- момент инерције свих осовина $J = 0{,}00022\ kg \cdot m^2$,
- коефицијент трења свих осовина $K_v = 0{,}004\ Nms/rad$,
- коефицијент крутости осовине бр.1 $K_s = 150\ Nm/rad$,
- коефицијент крутости осовине бр.2 $K_s = 350\ Nm/rad$,
- коефицијент крутости осовине бр.3 $K_s = 1400\ Nm/rad$.

Подаци о инерцијалним дисковима:

- момент инерције диска $J = 0{,}00062\ kg \cdot m^2$.

На слици 6.1. приказан је изглед симулационог дијаграма у **"Simulink"**-у који је у складу са дијаграмом на слици 5.8, а који ће се користити при извођењу рачунарских симулација.



Слика 6.1. Изглед симулациониг дијаграма математичког модела серво погона

На датој слици, могу се препознати целине које су описане у поглављу **5**: петља струјне регулације која је моделирана кашњењем првог реда према закључцима изведеним у **5.1.** и у складу са изразом (5.15.), механички подсистем са еластично спрегнутим масама, моделиран према закључцима изведеним у **5.2.**, електромагнетни ризолвер са синхроконвертором моделиран према закључцима изведеним у **5.3.2.**, ограничена резолуција ризолвера моделирана према закључцима изведеним у **5.3.3.** и мерење брзине по методи диференце позиције.

Функција преноса која ће се користити за синтезу регулатора методом подешавања полова коришћењем полиномијалних једначина биће изведена према математичком моделу датом на слици 6.1. уз претходно занемаривање функције преноса синхроконвертора и ограничене резолуције ризолвера, односно према блок дијаграму који је приказан на слици 6.2.

У складу са наведеним бројним подацима и претходним разматрањима, функција преноса која ће се користити за синтезу регулатора методом подешавања полова се изводи на следећи начин; функција преноса актуатора је дата са:

$$W_{em}(s) = \frac{1}{1 + \tau_{em} s}, \tag{6.1}$$

односно, узевши да је $\tau_{em} = 0.0005$,

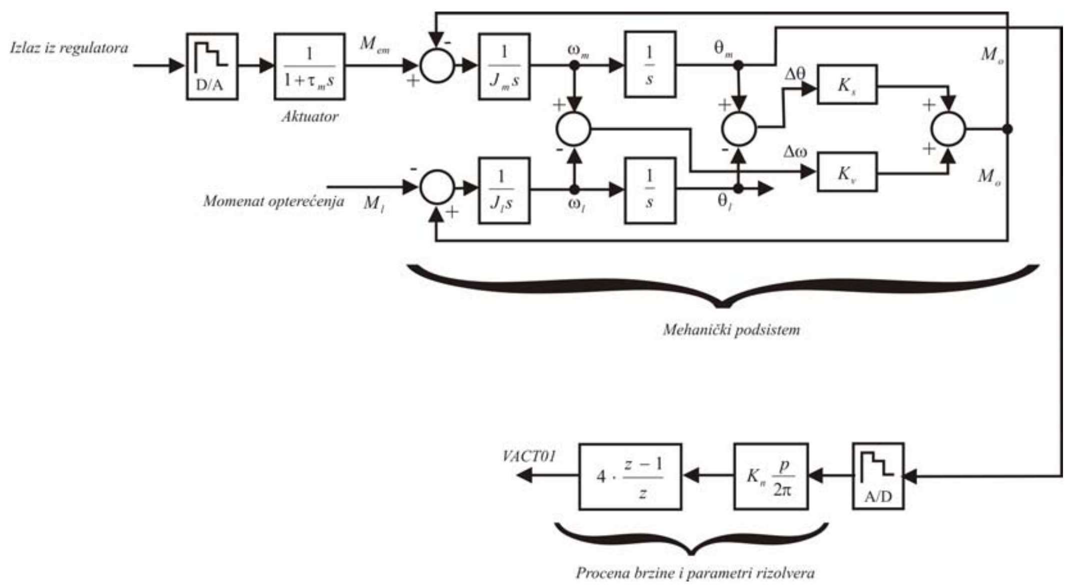
$$W_{em}(s) = \frac{1}{1 + 0.0005s}. \tag{6.2}$$

Функција преноса механичког подсистема на основу израза 5.22. дата је следећом функцијом преноса између положаја осовине мотора и електромагнетског момента мотора:

$$W_{meh}(s) = \frac{\theta_m(s)}{M_{em}(s)} = \frac{J_l \cdot s^2 + K_v \cdot s + K_s}{s^2 \cdot \left(J_m J_l \cdot s^2 + (J_m + J_l) \cdot (K_v \cdot s + K_s)\right)}, \tag{6.3}$$

односно, заменом бројних вредности за $J_m = 0{,}00062\ kg \cdot m^2$, $J_l = 0{,}00084\ kg \cdot m^2$, $K_s = 350\ Nm/rad$ и $K_v = 0{,}004\ Nms/rad$ долази се до израза:

$$W_{meh}(s) = \frac{0.00084 \cdot s^2 + 0.004 \cdot s + 350}{5.208 \cdot 10^{-7} \cdot s^4 + 5.84 \cdot 10^{-6} \cdot s^3 + 0.511 \cdot s^2}. \tag{6.4}$$



Слика 6.2. Дијаграм на основу кога се изводи функција преноса математичког модела серво погона

Даље је:

$$W = W_{em}(s) \cdot W_{meh}(s) = \frac{6.152 \cdot 10^{-7} \cdot s^2 + 2.93 \cdot 10^{-6} \cdot s + 0.2563}{2.604 \cdot 10^{-10} \cdot s^5 + 5.237 \cdot 10^{-7} \cdot s^4 + 2.613 \cdot 10^{-4} \cdot s^3 + 0.511 \cdot s^2}. \tag{6.5}$$

Дискретизацијом функције преноса описане једначином 6.5. уз периоду одабирања од $T = 0.0003\ s$, долази се до следеће дискретне функције преноса:

$$G(z) = \frac{9.182 \cdot 10^{-9} \cdot z^4 + 1.373 \cdot 10^{-8} \cdot z^3 - 4.628 \cdot 10^{-8} \cdot z^2 + 1.836 \cdot 10^{-8} \cdot z + 6.791 \cdot 10^{-9}}{z^5 - 4.458 \cdot z^4 + 7.96 \cdot z^3 - 7.094 \cdot z^2 + 3.138 \cdot z - 0.547}. \tag{6.6}$$

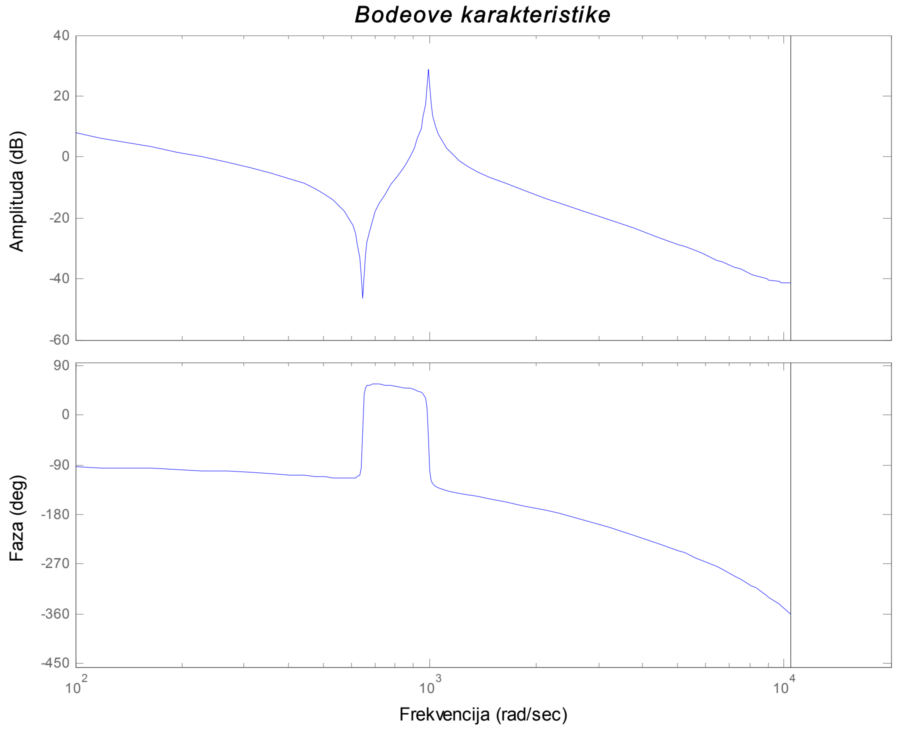
Имајући у виду функцију преноса процене брзине и константе ризолвера:

$$G_b(z) = \frac{K_n \cdot p}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{4 \cdot (z-1)}{z} = \frac{16 \cdot 4}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{4 \cdot (z-1)}{z}, \tag{6.7}$$

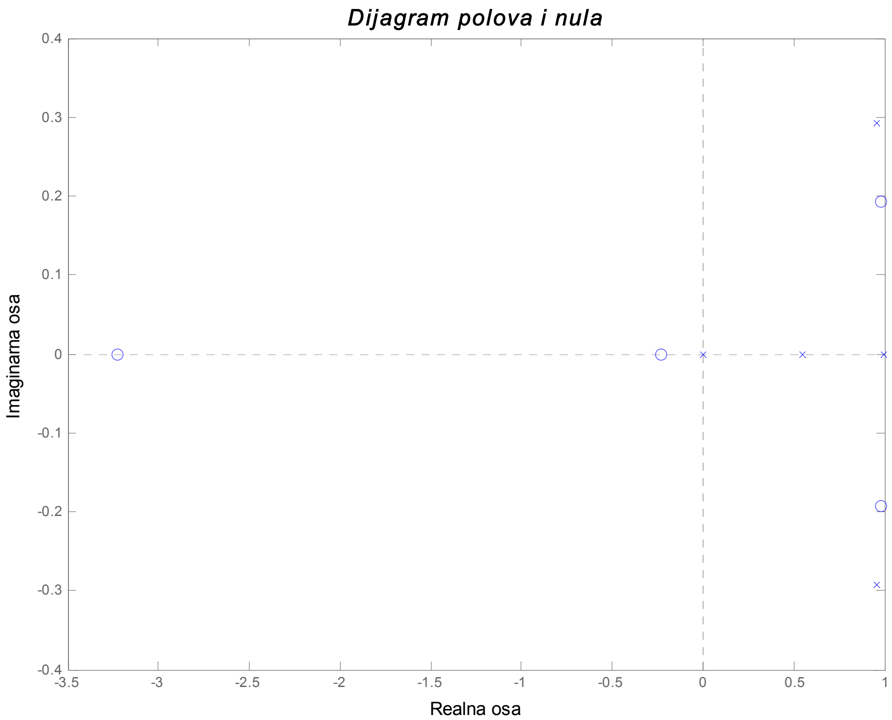
долази се до коначног израза за дискретну функцију преноса која ће се користити за синтезу регулатора методом подешавања полова:

$$G_p(z) = G(z) \cdot G_b(z) = \frac{0.01512 \cdot z^4 + 0.02262 \cdot z^3 - 0.07622 \cdot z^2 + 0.03024 \cdot z + 0.01118}{z^5 - 3.458 \cdot z^4 + 4.502 \cdot z^3 - 2.591 \cdot z^2 + 0.547 \cdot z}. \quad (6.8)$$

Бодеова амплитудска и фазна фреквентна карактеристика и дијаграм полова и нула у $\boldsymbol{z}$ равни за функцију преноса 6.8. су дати на сликама 6.3 и 6.4:



Слика 6.3. Бодеове карактеристике функције преноса математичког модела серво погона



Слика 6.4. Дијаграм полова и нула функције преноса математичког модела серво погона

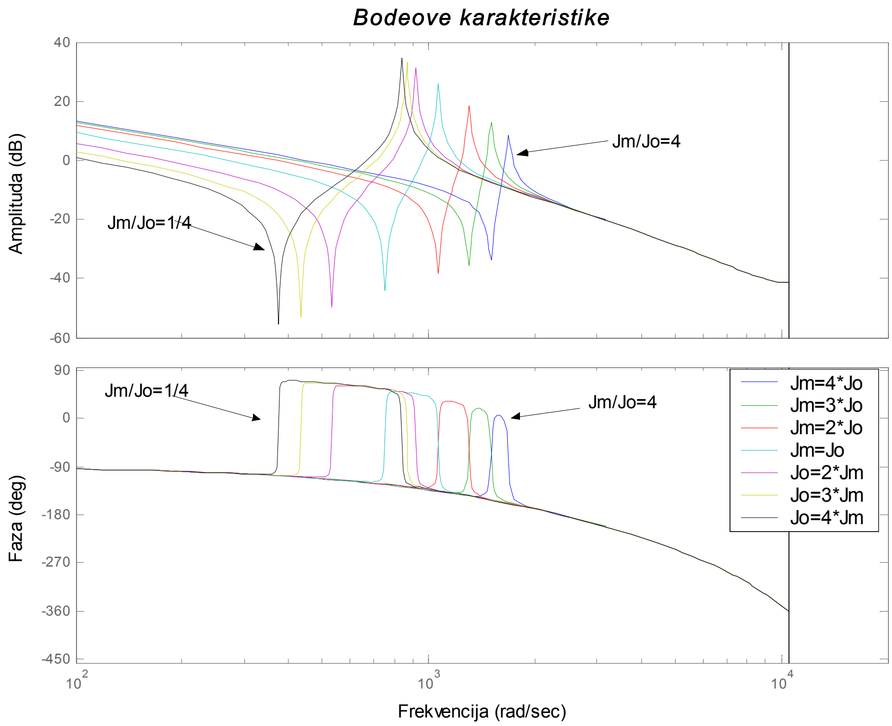
6.1.1 Утицај појединих параметара на карактеристике функције преноса

Испитајмо сада утицај односа момената инерције мотора и оптерећења и коефицијента крутости осовине на карактеристике функције преноса. У том циљу извешћемо фамилије Бодеових карактеристика и сагледати кретање полова и нула у z равни за различите односе момента инерције мотора и оптерећења, односно за различите вредности коефицијента крутости осовине.

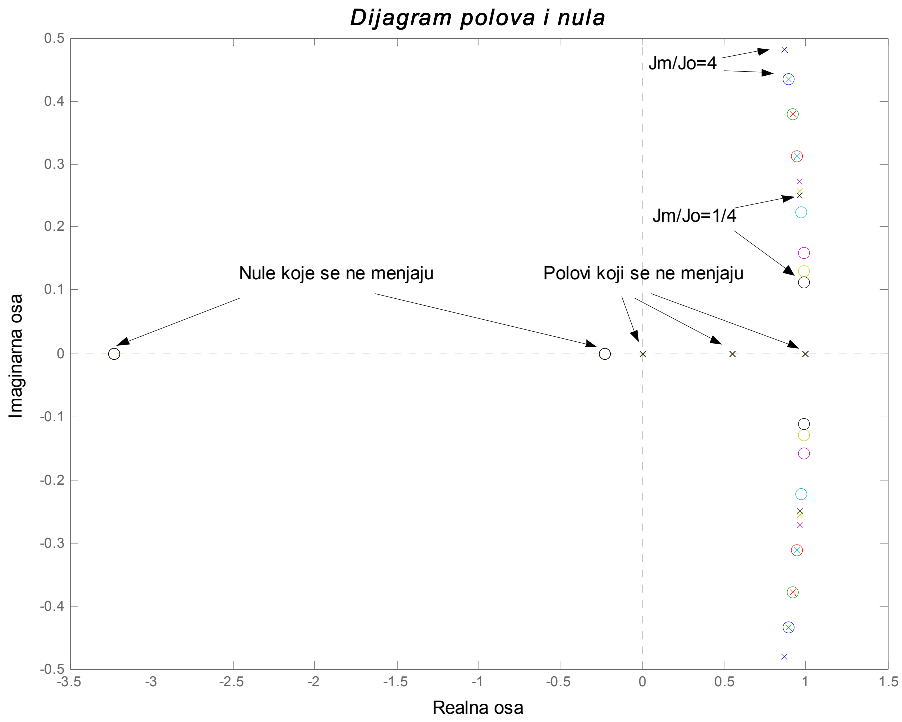
Да би сагледали утицај различитих односа момента инерције мотора J_m и момента инерције оптерећења J_o, извршићемо прорачунавање функције преноса и конструисање Бодеових карактеристика и дијаграма полова и нула за следеће односе:

1. $J_m = \dfrac{J_o}{4}$;
2. $J_m = \dfrac{J_o}{3}$;
3. $J_m = \dfrac{J_o}{2}$;
4. $J_m = J_o$;
5. $J_m = 2 \cdot J_o$;
6. $J_m = 3 \cdot J_o$, и
7. $J_m = 4 \cdot J_o$.

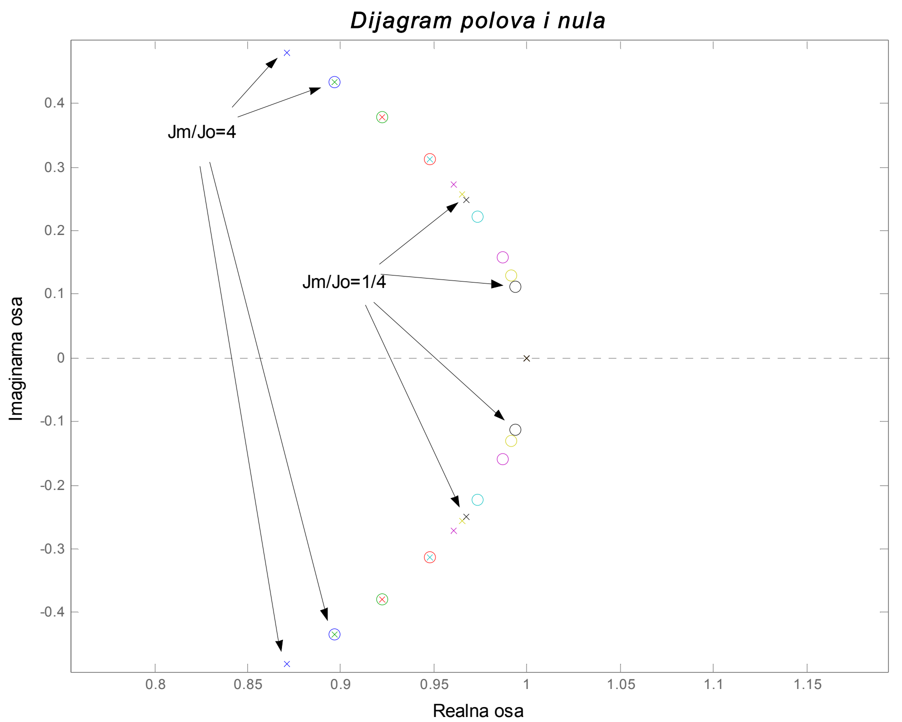
Одговарајуће Бодеове карактеристике и дијаграм полова и нула за наведене фамилије функција преноса дате су сликама 6.5, 6.6 и 6.7.



Слика 6.5. Бодеове карактеристике фамилије функција преноса математичког модела серво погона за различите вредности односа момента инерције мотора и момента инерције оптерећења



Слика 6.6. Дијаграм полова и нула фамилије функција преноса математичког модела серво погона за различите вредности односа момента инерције мотора и момента инерције оптерећења

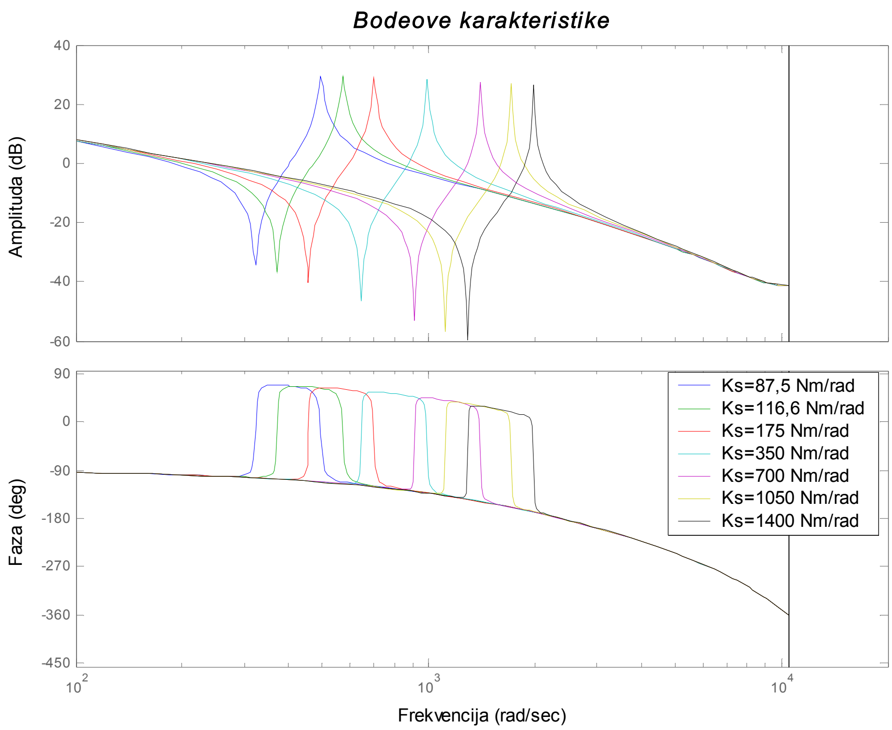


Слика 6.7. Увећан детаљ дијаграма полова и нула фамилије функција преноса математичког модела серво погона за различите вредности односа момента инерције мотора и момента инерције оптерећења

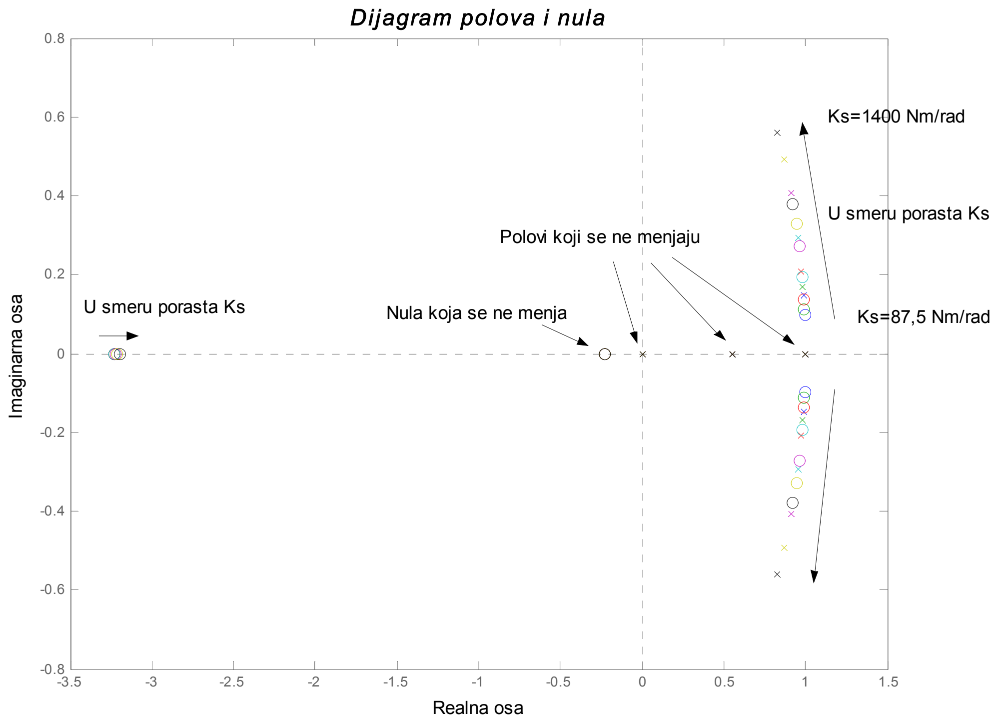
Да би сагледали утицај различитих вредности коефицијента крутости осовине. K_s, извршићемо прорачунавање функције преноса и конструисање Бодеових карактеристика и дијаграма полова и нула за следеће вредности коефицијента:

1. $K_s = 87{,}5\ Nm/rad$;
2. $K_s = 116{,}6\ Nm/rad$;
3. $K_s = 175\ Nm/rad$;
4. $K_s = 350\ Nm/rad$;
5. $K_s = 700\ Nm/rad$;
6. $K_s = 1050\ Nm/rad$, и
7. $K_s = 1400\ Nm/rad$.

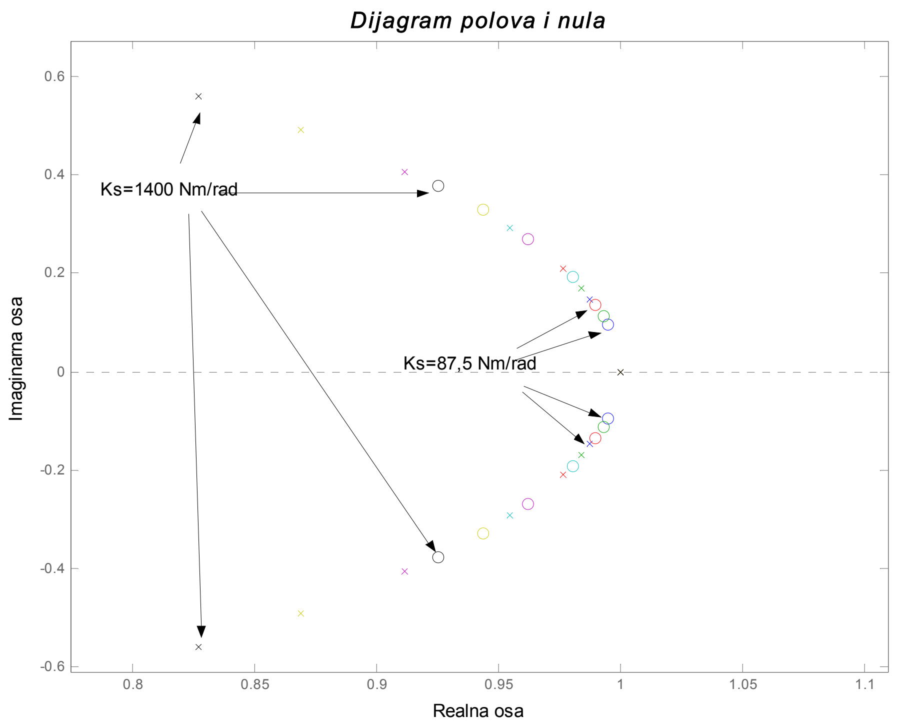
Одговарајуће Бодеове карактеристике и дијаграм полова и нула за наведене фамилије функција преноса дате су сликама 6.8, 6.9, 6.10 и 6.11.



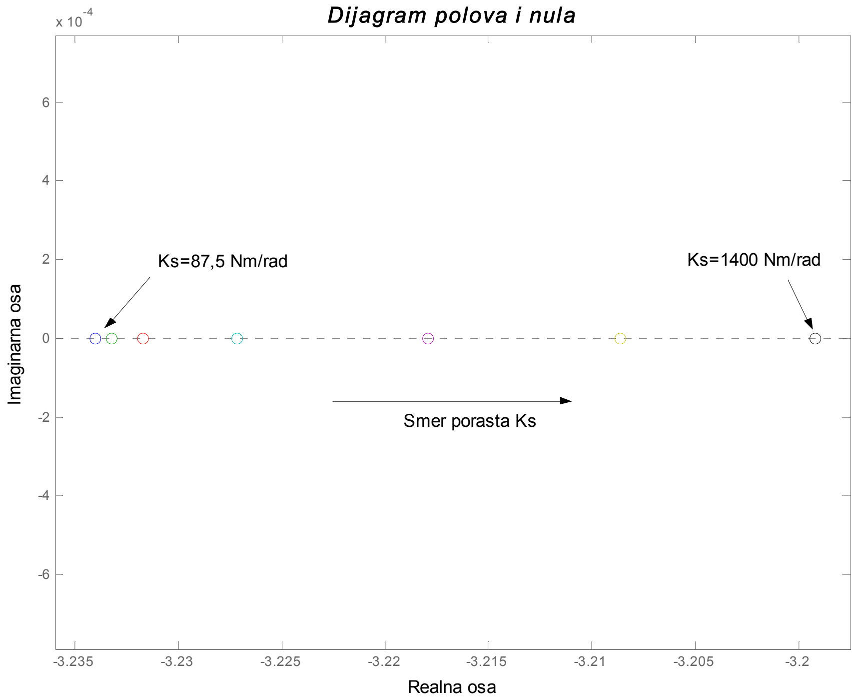
Слика 6.8. Бодеове карактеристике фамилије функција преноса математичког модела серво погона за различите вредности коефицијента крутости осовине



Слика 6.9. Дијаграм полова и нула фамилије функција преноса математичког модела серво погона за различите вредности коефицијента крутости осовине

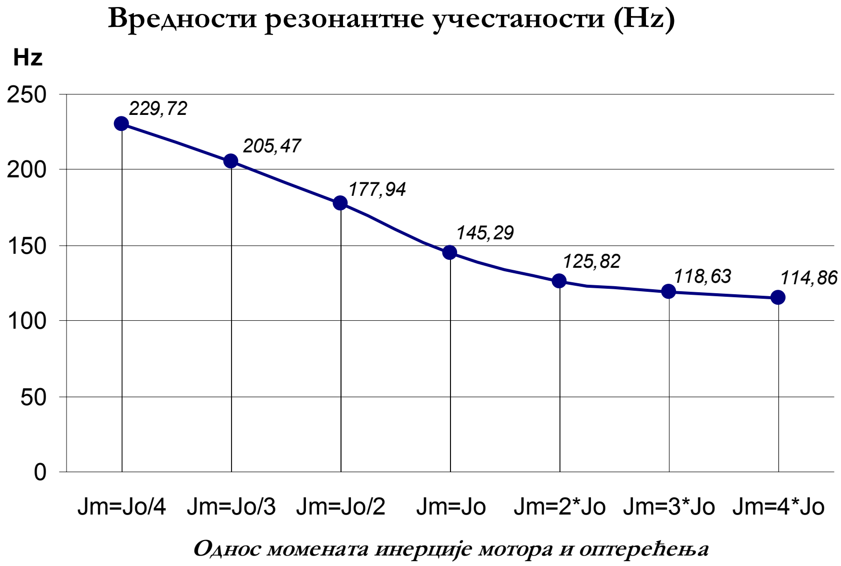


Слика 6.10. Увећан детаљ дијаграма полова и нула фамилије функција преноса математичког модела серво погона за различите вредности коефицијента крутости осовине



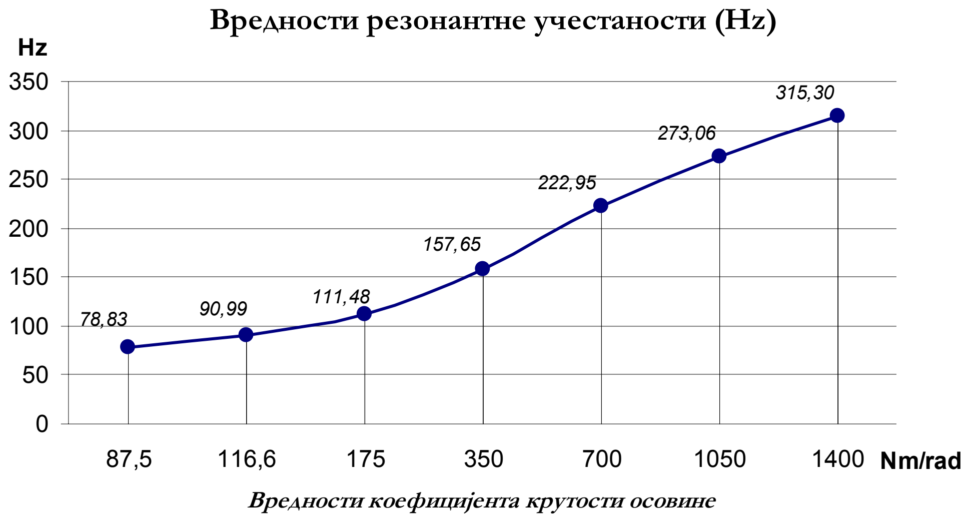
Слика 6.11. Увећан детаљ дијаграма полова и нула фамилије функција преноса математичког модела серво погона за различите вредности коефицијента крутости осовине

Сагледавањем добијених карактеристика и имајући у виду израз (5.28) којим је дефинисана резонантна учестаност механичких осцилација ω_p, јасно се види да се промена односа момента инерције мотора и оптерећења одражава на кретање доминантног пара коњуговано-комплексних полова и доминантног пара коњуговано-комплексних нула. Код оба ова пара долази до смањења имагинарне вредности и повећања реалне вредности са смањењењем односа између момената инерције мотора и оптерећења. Овакво понашање наведених полова доводи до промене резонантне учестаности, што се види и на графику приказаном на слици 6.12.



Слика 6.12. Вредности резонантне учестаности ω_p у зависности од односа момената инерције мотора и оптерећења

Што се тиче коефицијента крутости осовине K_s, промене његове вредности се такође одражава на кретање доминантног пара коњуговано-комплексних полова и доминантног пара коњуговано-комплексних нула. Код оба ова пара долази до смањења имагинарне вредности и повећања реалне вредности са смањењењем вредности коефицијента крутости осовине K_s. Овакво понашање наведених полова, као и у претходном случају, доводи до промене вредности резонантне учестаности, што је илустровано дијаграмом на слици 6.13.



Слика 6.13. Вредности резонантне учестаности ω_p у зависности од вредности коефицијента крутости осовине K_s

Дакле, када долази до смањења вредности коефицијента крутости осовине, можемо рећи да се резонантна учестаност механичких осцилација снижава, док полови система теже јединичном кругу тј. граници стабилности чиме читав систем постаје мање стабилан.

На основу претходног разматрања, за даља истраживања ћемо поставити следеће три конфигурације приказане у наредној табели:

Табела 6.1. Конфигурације система мотор – осовина – оптерећење

Параметри			**Конфигурација система**		
			број 1 - “мека”	**број 2 - “средња”**	**број 3 - “тврда”**
Момент инерције мотора:	J_m	$kg \cdot m^2$	0.00062	0.00062	0.00062
Момент инерције оптерећења:	J_l	$kg \cdot m^2$	0.00208	0.00084	0.00084
Однос момената инерције:	J_l / J_m	неим. бр.	3.3548	1.3548	1.3548
Коефицијент крутости осовине:	K_s	$\frac{N \cdot m}{rad}$	150	350	1400
Резонантна учестаност механичких осцилација:	ω_p	Hz	**89.19**	**157.65**	**315.30**

Дискретна функција преноса за конфигурацију број 2 је већ изведена у претходном делу овог одељка и дата је изразом (6.8):

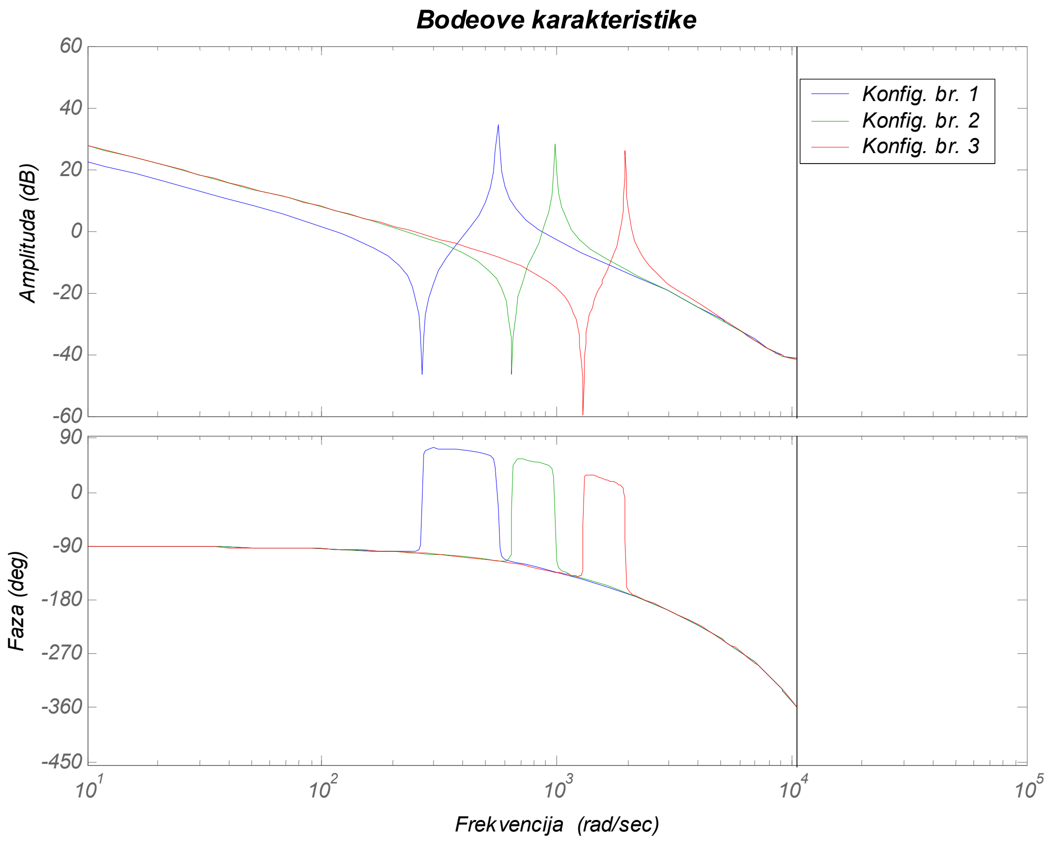
$$G_{p2}(z) = \frac{0.01512 \cdot z^4 + 0.02262 \cdot z^3 - 0.07622 \cdot z^2 + 0.03024 \cdot z + 0.01118}{z^5 - 3.458 \cdot z^4 + 4.502 \cdot z^3 - 2.591 \cdot z^2 + 0.547 \cdot z}. \tag{6.8}$$

На исти начин, изводе се и дискретне функције преноса преостале две конфигурације:

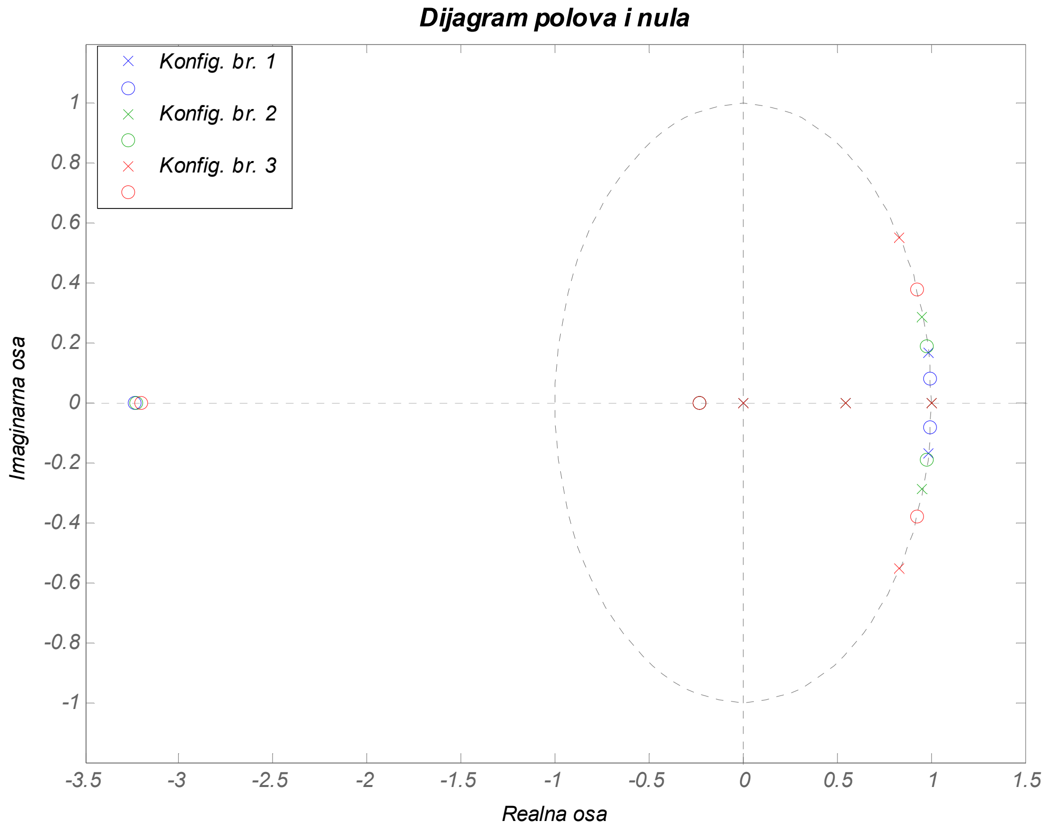
$$G_{p1}(z) = \frac{0.01515 \cdot z^4 + 0.02224 \cdot z^3 - 0.07813 \cdot z^2 + 0.03005 \cdot z + 0.01121}{z^5 - 3.518 \cdot z^4 + 4.596 \cdot z^3 - 2.626 \cdot z^2 + 0.547 \cdot z}. \tag{6.9}$$

$$G_{p3}(z) = \frac{0.01454 \cdot z^4 + 0.02299 \cdot z^3 - 0.06705 \cdot z^2 + 0.02989 \cdot z + 0.01076}{z^5 - 3.209 \cdot z^4 + 4.117 \cdot z^3 - 2.455 \cdot z^2 + 0.547 \cdot z}. \tag{6.10}$$

Бодеова амплитудска и фазна фреквентна карактеристика као и дијаграм полова и нула у ***z*** равни за функције преноса (6.8.), (6.9.) и (6.10) су дате на сликама 6.14 и 6.15:



Слика 6.14. Бодеове карактеристике одговарајућих дискретних функција преноса за три одабране конфигурације



Слика 6.15. Дијаграм полова и нула одговарајућих дискретних функција преноса за три одабране конфигурације

6.2 Синтеза регулатора

За претходне три конфигурације извршена је синтеза дигиталног регулатора методом подешавања полова користећи се алгоритмом и графичким корисничким интерфејсом који су детаљно описани у претходном поглављу, уз коришћење закључака који су изведени у поглављу 3. У оквиру овог одељка приказаћемо процес пројектовања дигиталног регулатора серво система на примеру конфигурације број 2, будући да је процес извођења и за преостале две идентичан.

<u>КОРАК I</u>

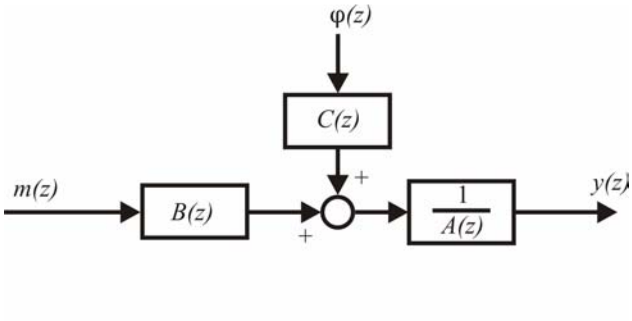
Као што је речено у оквиру првог корака у процесу пројектовања дигиталног регулатора потребно је да се на основу познате функције дискретног преноса $G_P(z)$ која представља динамику процеса, и функције дискретног преноса поремећаја $G_\Phi(z)$, специфицира функција преноса објекта управљања и функција преноса поремећаја у облику каноничне уопштене структуре (слика 6.16.), што за конфигурацију број 2 доводи до следећих полинома:

$$A(z) = z^5 - 3.458 \cdot z^4 + 4.502 \cdot z^3 - 2.591 \cdot z^2 + 0.547 \cdot z, \tag{6.11}$$

$$B(z) = 0.01512 \cdot z^4 + 0.02262 \cdot z^3 - 0.07622 \cdot z^2 + 0.03024 \cdot z + 0.01118, \tag{6.12}$$

$$C(z) = 0.4289 \cdot z^4 + 4.006 \cdot z^3 + 1.573 \cdot z^2 - 1.826 \cdot z - 0.1728, \tag{6.13}$$

при чему је периода одабирања $T_s = 0.0003\, s$.



Слика 6.16. Канонична уопштена структура објекта управљања

КОРАК II

У овом кораку је потребно донети одлуку о евентуалном скраћивању нула функције преноса *GP(z)* тј. нула полинома *B*(*z*). На слици 6.4. је приказан дијаграм полова и нула за разматрани процес, док су вредности нула полинома *B*(*z*), дате следећим вредностима:

$$\begin{aligned} Z_{B1} &= -3.22777, \\ \left.\begin{aligned} Z_{B2} &= 0.980575 + j\,0.192439, \\ Z_{B3} &= 0.980575 - j\,0.192439, \end{aligned}\right\} &\text{коњуговано - комплексне нуле,} \\ Z_{B4} &= -0.229411. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Скраћивање нула са негативним реалним делом уноси скоковитост и таласност (“ripple”) у одзиву управљачког сигнала па се стога нуле Z_{B1} и Z_{B4} несмеју скратити. Такође, пар коњугивано-комплексних нула Z_{B2} и Z_{B3} лежи доста близу јединичном кругу ***z*** равни, па имајући у виду да услед варијације параметра процеса варирају и нуле и полови функције дискретног преноса којом се описује тај процес, нарочито када су у питању слабо пригушене нуле, и ове нуле не треба скратити.

По доношењу одлуке о скраћивању нула потребно је извршити растављање на чиниоце полинома *B*(*z*) на следећи начин: $B(z) = B^{+}(z) \cdot B^{-}(z)$, где је $B^{+}(z)$ полинома нула које се желе скратити, а $B^{-}(z)$ полином који садржи у себи нуле које се не желе скратити и нуле које не леже унутар јединичног круга ***z*** равни. У конкретном случају та два полинома су дата следећим изразима:

$$B^{+}(z) = 1, \tag{6.15}$$

$$B^{-}(z) = B(z) = 0.01512 \cdot z^4 + 0.02262 \cdot z^3 - 0.07622 \cdot z^2 + 0.03024 \cdot z + 0.01118. \tag{6.16}$$

КОРАК III

У оквиру одељка 3.7. је показано да се неки захтеви и карактеристике регулатора, као што је нпр. захтев за редуковањем утицаји услед поремећаја и мерног шума, могу постићи специфичним обликом полинома $R(z)$ и $S(z)$, односно укључивањем неких унапред изабраних чинилаца $R_f(z)$ и $S_f(z)$, у наведене полиноме, као $R(z) = R_f(z) \cdot R''(z)$ и $S(z) = S_f(z) \cdot S''(z)$. Из тог разлога у трећем кораку је потребно дефинисати унапред изабране чиниоце $R_f(z)$ и $S_f(z)$. Будући да је типични поремећај који се јавља у серво системима са регулацијом брзине константан или споропроменљиви поремећај у виду момента оптерећења, може се закључити да се такав поремећај ефикасно може пригушити на учестаностима на којима је појачање повратне спреге велико, односно вредност полинома $R(z)$ мала. Са друге стране, могуће је елиминисати грешку у стационарном стању при константном дејству поремећаја оптерећења, изабравши $R(1)=0$, што је еквивалентно дејству интегралног компензатора. Имајући у виду и табелу 3.2. модела поремећаја, у складу са принципом унутрашњег модела поремећаја и претходно изнетим, извршићемо уношење следећих изабраних чиниоца:

$$R_f(z) = 1 - z^{-1}, \tag{6.17}$$

$$S_f(z) = 1. \tag{6.18}$$

КОРАК IV

У четвртом кораку најпре је потребно извршити избор степена полинома R, уз услов да се обезбеди каузалност закона управљања испуњавањем услова $\deg R \geq \deg T$ и $\deg R \geq \deg S$. Како је периода одабирања доста мала, узимајући да је време прорачуна управљачког сигнала блиском трајању периоде одабирања, изабирамо:

$$\deg R = 1 + \deg S = 1 + \deg T. \tag{6.19}$$

КОРАК V

У петом кораку је потребно извршити избор реда функције преноса дигиталног закона управљања пројектованог методом подешавања полова, односно одредити степене полинома тако да се добије решење минималног реда. На основу специфицираних параметара у претходним корацима вршимо прорачун степене полинома:

$$\deg A' = \deg A = 5,\ \deg B^{+} = 0, \tag{6.20}$$

$$\deg S = \deg T = \deg A' - 1 = 4,\ \deg R = 1 + \deg S = 5,, \tag{6.21}$$

$$\deg A_m = \deg A' = 5, \tag{6.22}$$

$$\deg A_o = \deg R + \deg S + 2 - \deg A_m - \deg B^{+} - 1 = 5 + 4 + 2 - 5 - 0 - 1 = 5. \tag{6.23}$$

КОРАК VI

У шестом кораку алгоритма извршена је спецификација жељених перформанси у погледу одзива серво система избором функције дискретног преноса у затвореној спрези $G_M(z)$. Другим речима потребно је извршити спецификацију полинома A_m и B_m.

Жеља нам је да систем у затвореној спрези буде са апериодичним одзивом, уз што шири могући пропусни опсег. Стога полови система у затвореној спрези морају бити исти и да се налазе на позитивном делу реалне осе унутар јединичног круга *z*-равни. Жељена временска константа је изабрана да буде око 6 периода одабирања, што уз употребу израза (3.118) доводи до израза за полином A_m:

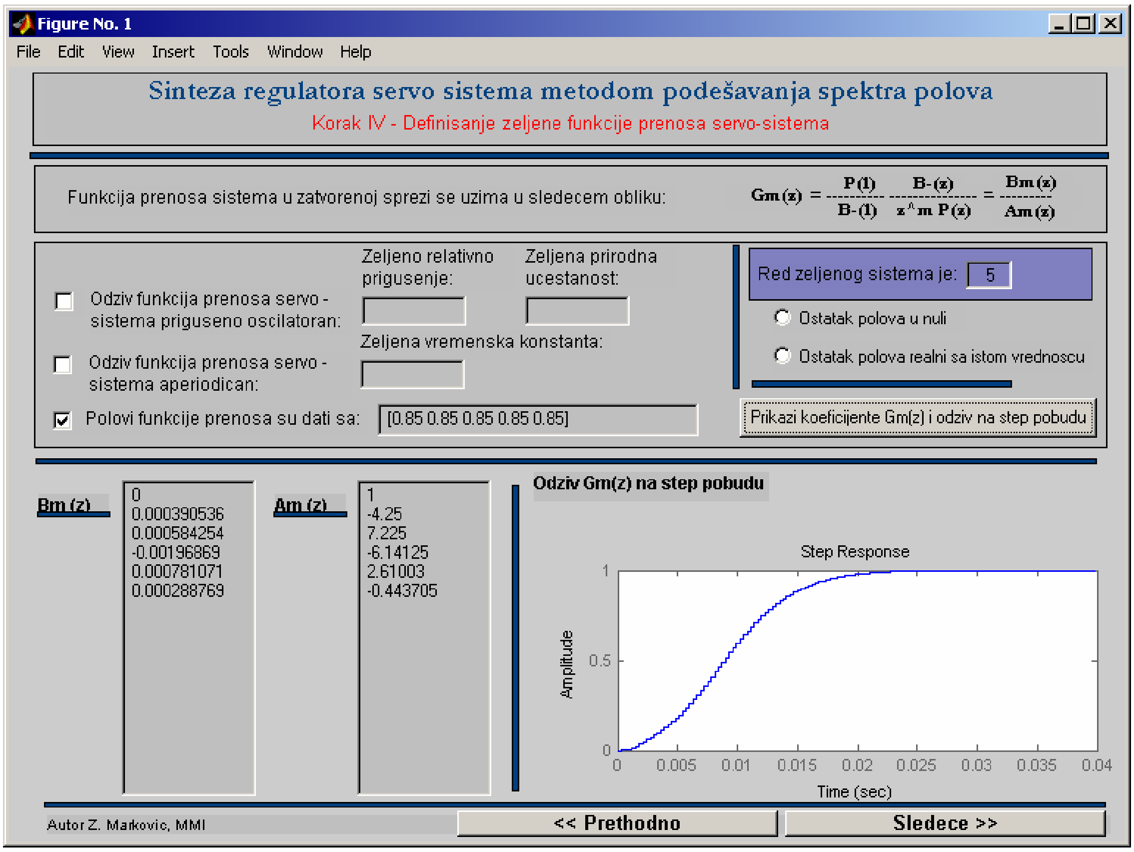
$$A_m(z) = \left(z - e^{-\frac{T_s}{T_d}} \right)^{n} = (z - 0.85)^5. \tag{6.24}$$

где је *n* ред система $G_M(z)$, тј. степен полинома A_m у имениоцу, који је изабран у претходном кораку.

Нуле полинома $B_m = B'_m(z) \cdot B^-(z)$, у бројиоцу $G_M(z)$, су већ дефинисане са $B^-(z)$. Полином $B'_m(z)$ бирамо као константу *K*, која је, да би обезбедили серво перформансе система са затвореном повратном спрегом, дефинисана са $K = A_m(1)/B^-(1)$.

На овај начин долазимо до израза за функцију дискретног преноса у затвореној спрези $G_M(z)$:

$$G_M(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{0.00039 \cdot z^4 + 0.00058 \cdot z^3 - 0.00196 \cdot z^2 + 0.00078 \cdot z + 0.000288}{z^5 - 4.25 \cdot z^4 + 7.225 \cdot z^3 - 6.14125 \cdot z^2 + 2.61003 \cdot z - 0.443705}. \quad (6.25)$$

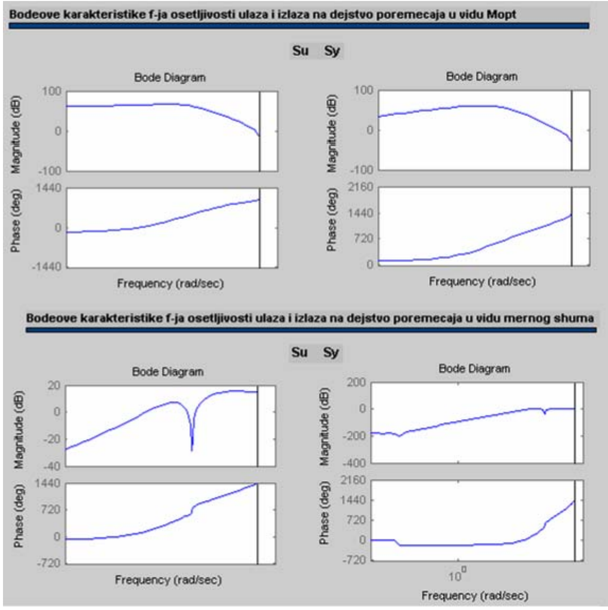


Слика 6.17. Четврти екран апликације за синтезу реглулатора серво система методом подешавања спектра полова

КОРАК VII

У последњем кораку алгоритма, испробана су различита решења за полином опсервера $A_o(z)$ уз сагледавање утицај нула полинома опсервера $A_o(z)$ на улазне и излазне функције осетљивости пројектовањем Бодеових карактеристика поменутих функција. Наведени поступак је понављан док није нађено најповољније решење које задовољава како услове стабилности дигиталног закона управљања и робусности система у затвореној спрези, тако и што је могуће веће потискивање утицаја услед поремећаја и мерног шума. Тако, за полином опсервера је усвојен следећи израз:

$$A_o(z) = (z-0.7)^2 \cdot (z-0.5) \cdot (z-0.1). \quad (6.26)$$



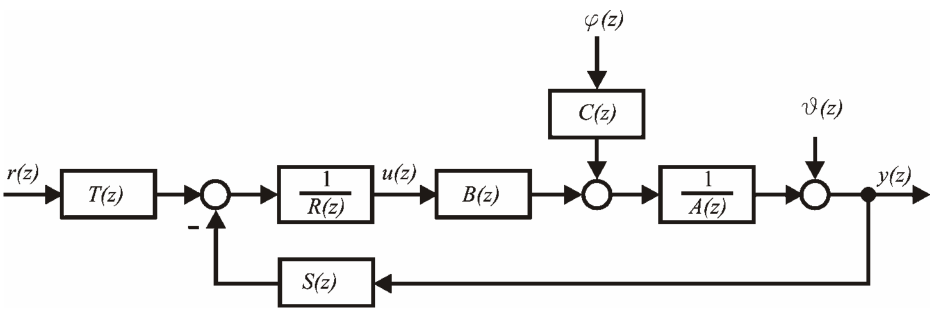
Слика 6.18. Део петог екрана апликације за синтезу регулатора серво система где су приказане Бодеове карактеристике функција осетљивости

По дефинисању нула полинома опсервера извршено је израчунавање полинома $R''(z)$, $S''(z)$ и $T(z)$, а потом су израчунати и полиноми $R(z)$ и $S(z)$, што је резултовало следећим њиховим вредностима:

$$R(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \left(z^4 - 1.85814 \cdot z^3 + 0.981306 \cdot z^2 - 0.16905 \cdot z + 0.058215\right), \tag{6.27}$$

$$S(z) = 4.36751 \cdot z^4 - 14.4635 \cdot z^3 + 17.7422 \cdot z^2 - 9.5211 \cdot z + 1.87592, \tag{6.28}$$

$$T(z) = 0.025829 \cdot z^4 - 0.051658 \cdot z^3 + 0.035644 \cdot z^2 - 0.009401 \cdot z + 0.000632. \tag{6.29}$$



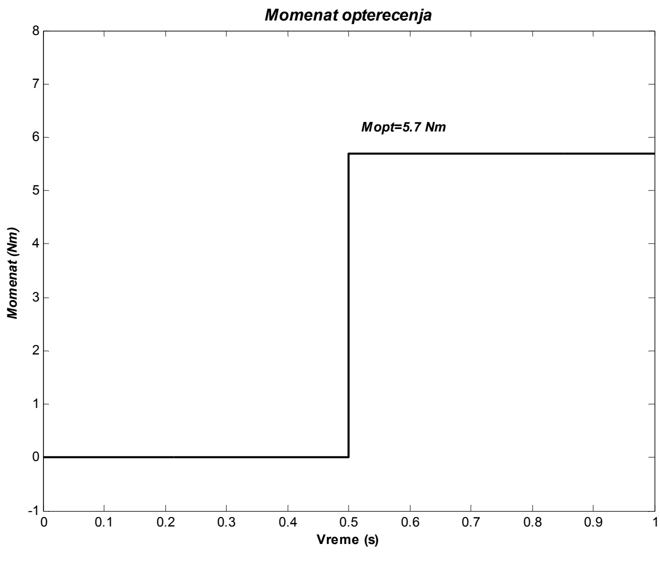
Слика 6.19. Блок дијаграм система са затвореном повратном спрегом.

6.3 АНАЛИЗА ПЕРФОРМАНСИ РЕГУЛАТОРА СИМУЛАЦИЈОМ НА РАЧУНАРУ

У претходном одељку на конкретном примеру серво-погона извршена је синтеза регулатора методом подешавања полова коришћењем полиномијалних једначина.У оквиру овог одељка на нивоу рачунарских симулација, а кроз конкретне конфигурације погона које су описане у претходном одељку биће анализиран утицај појединих карактеристичних параметара на перформансе и стабилност система у затвореној повратној спрези. Најпре ћемо на примеру конфигурације број 2, приказати утицај: различитих полинома опсервера, промене момената инерције мотора и оптерећења као и промене коефицијента крутости на одзив и перформансе регулатора. Даље ће, такође на примеру конфигурације број 2 (или како смо је назвали "средња") бити испитане перформансе пројектованог регулатора уколико се конфигурација погона промени у остале две конфигурације погона ("мека" и "тврда"), а које су дефинисане у одељку **6.1.1.**, табела 6.1. На крају, извршићемо упоредну анализу перформанси регулатора добијеног методом подешавања полова и перформанси стандардног регулатора пропроционално-интегралног дејства у инкременталној форми (**PI** регулатор), чији су параметри одређени према [26], [27], за иницијално подешене параметре и уколико се конфигурација погона промени из конфигурације број 2 у конфигурацију 1 ("мека"). Све рачунарске симулације су извршене у **MATLAB**®-овом програмском пакету за симулацију ***Simulink***, док се одговарајући симулациони фајлови налазе на дискети у прилогу овог рада.

6.3.1 Утицај полова опсервера на карактеристике регулатора

Прво ћемо испитати утицај полова опсервера на брзину и електромагнетни моменат мотора. У том циљу сагледаћемо дијаграме одзива брзине мотора на задату референцу брзине од 150 об/мин у виду степ сигнала у временском тренутку t=0.2 s и дејство поремећаја у виду момента оптерећења $M_{opt} = M_{nom} = 5.7\ Nm$, који као степ сигнал делује у временском тренутку t=0.5 s.

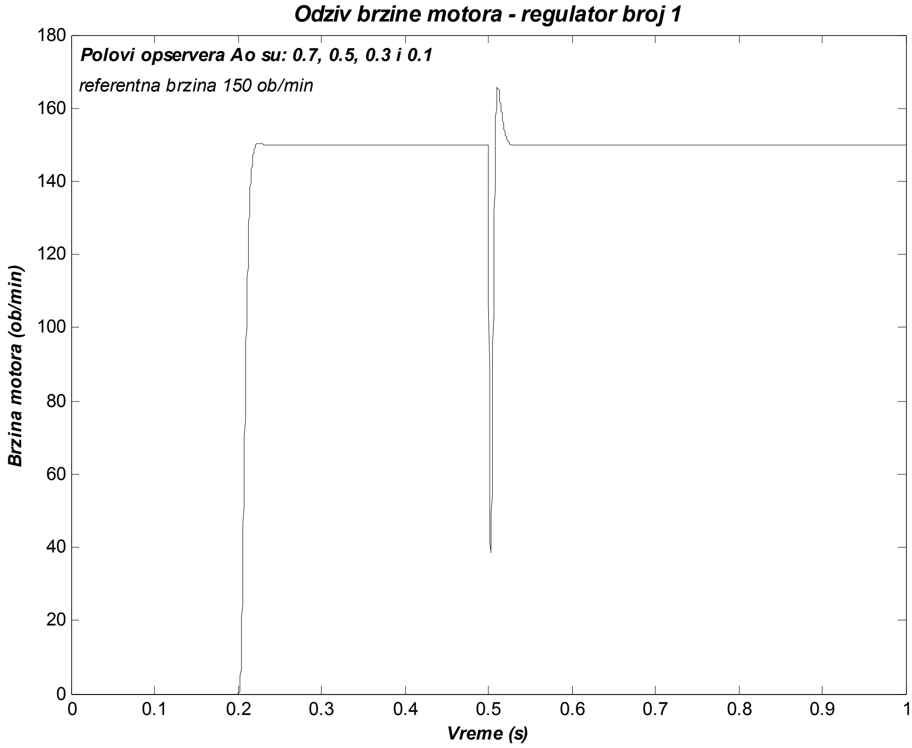


Слика 6.20. Изглед сигнала момента оптерећења.

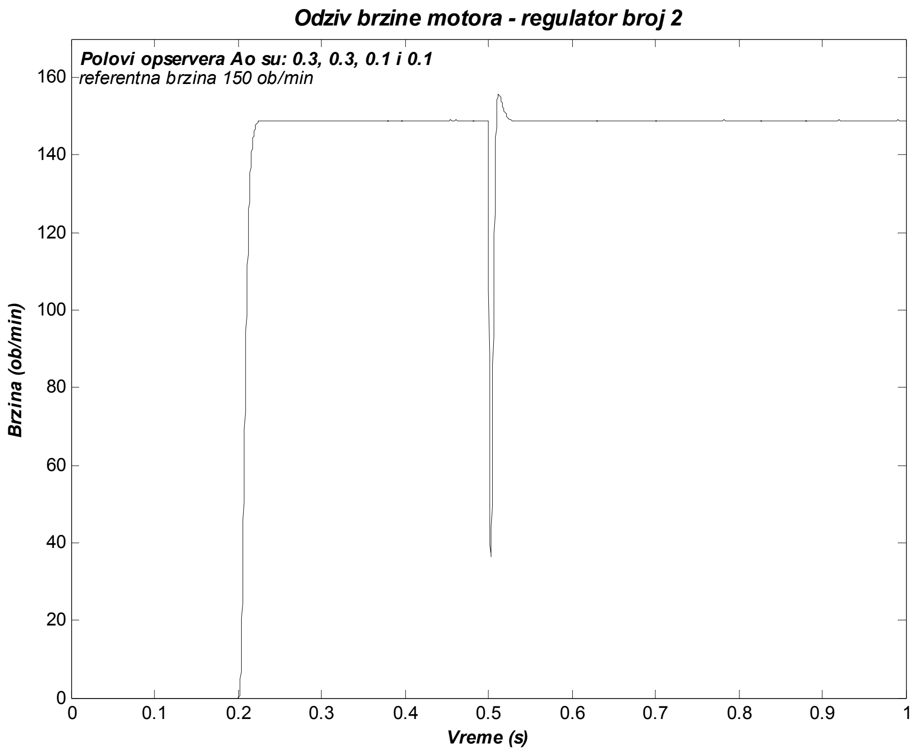
Испитаћемо три конфигурације регулатора код којих су полови опсервера подешени на следећи начин:

- Регулатор број 1: $A_o(z) = (z-0.7)\cdot(z-0.5)\cdot(z-0.3)\cdot(z-0.1)$

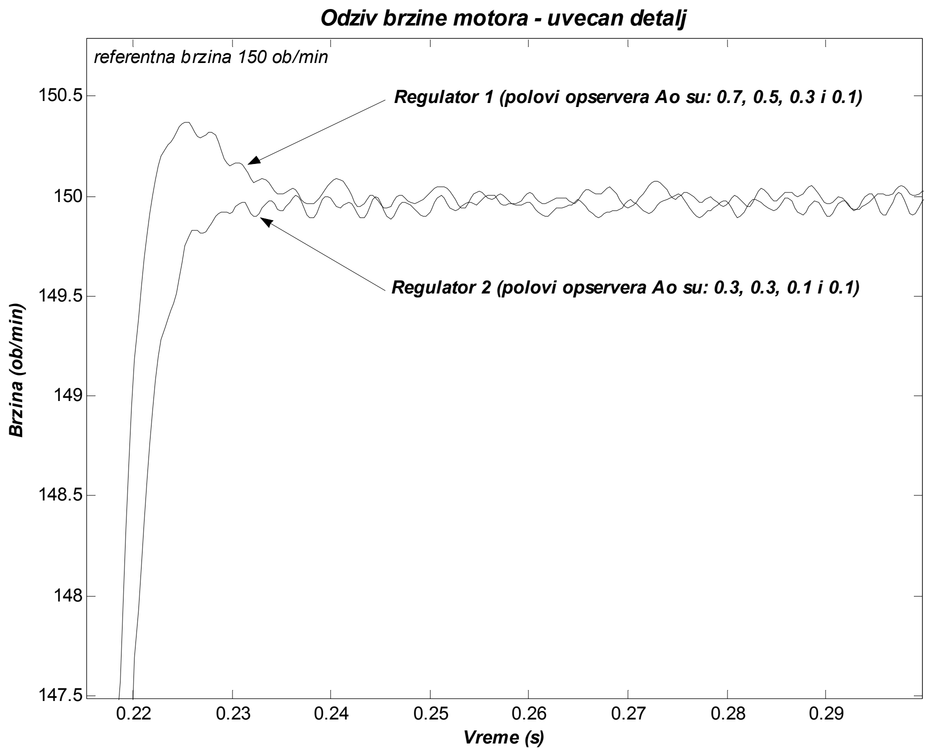
- Регулатор број 2: $A_o(z) = (z-0.3)^2 \cdot (z-0.1)^2$
- Регулатор број 3: $A_o(z) = z^2 \cdot (z-0.1)^2$



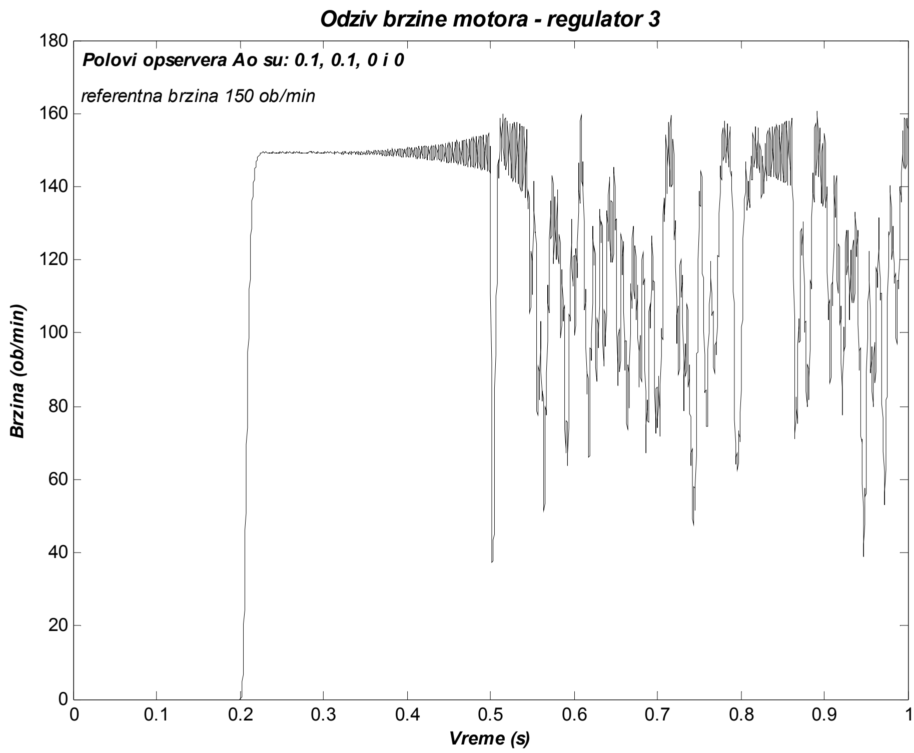
Слика 6.21. Одзив брзине мотора за регулатор број 1.



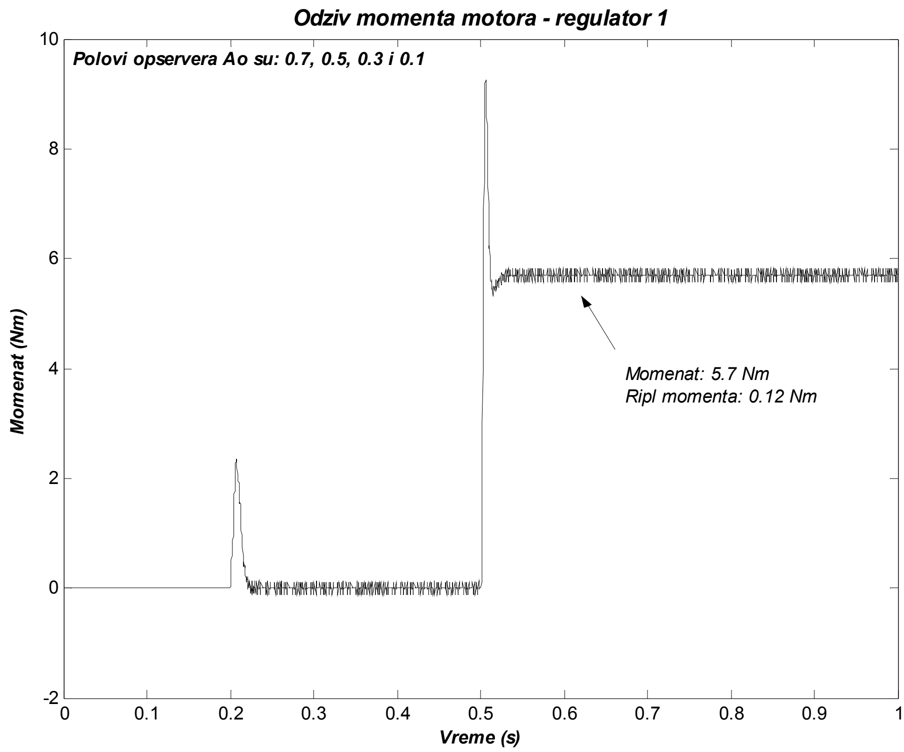
Слика 6.22. Одзив брзине мотора за регулатор број 2.



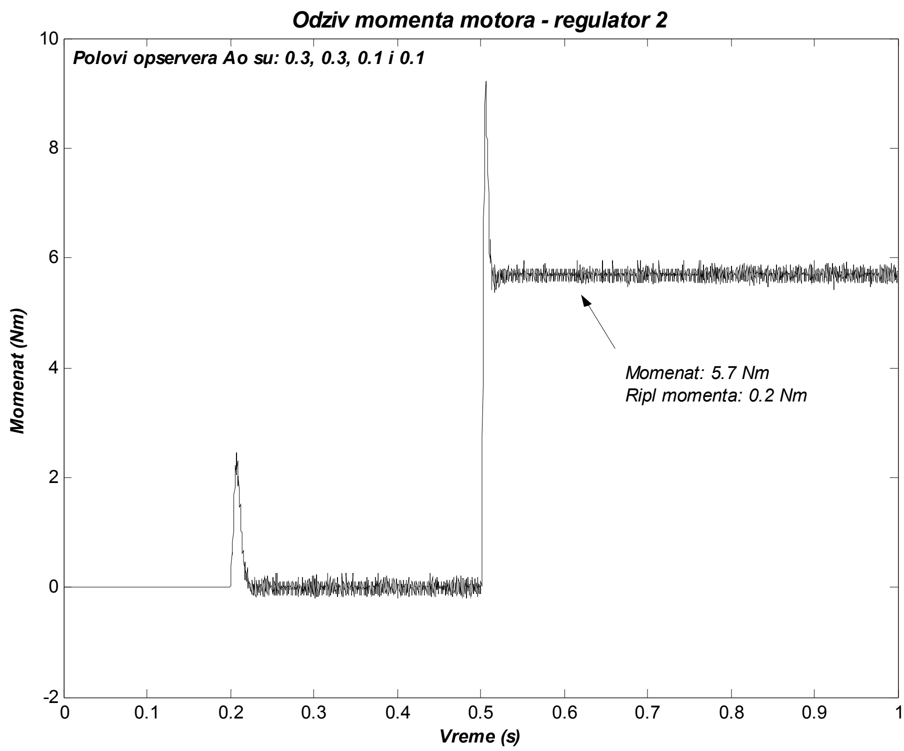
Слика 6.23. Упоредни приказ одзива брзине мотора за регулатор број 1 и регулатор број 2 – увећан детаљ.



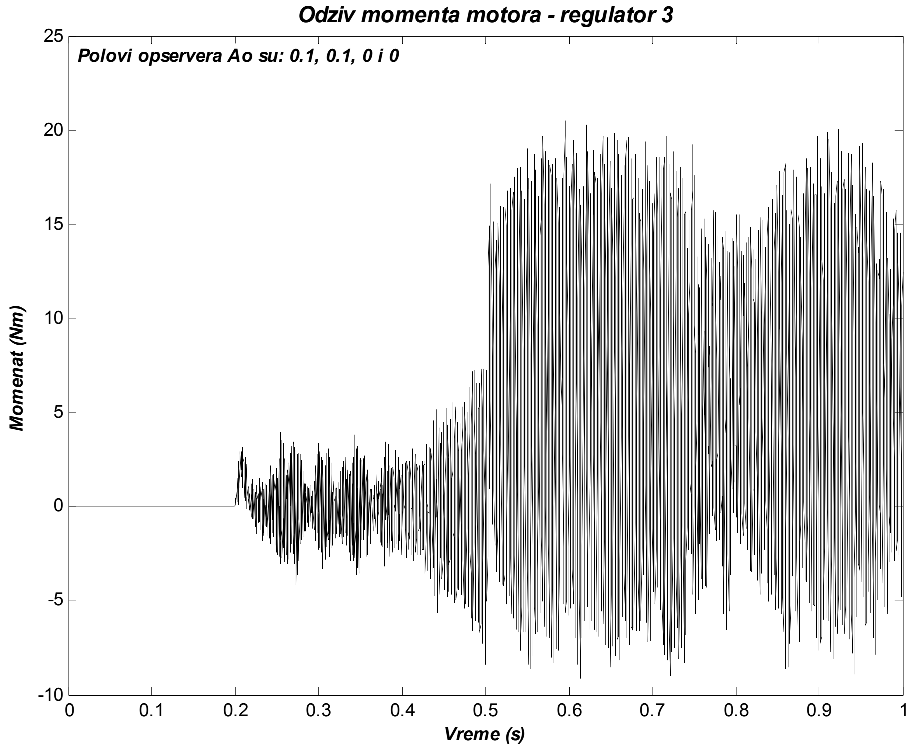
Слика 6.24. Одзив брзине мотора за регулатор број 3.



Слика 6.25. Одзив електромагнетног момента мотора за регулатор број 1.



Слика 6.26. Одзив електромагнетног момента мотора за регулатор број 2.



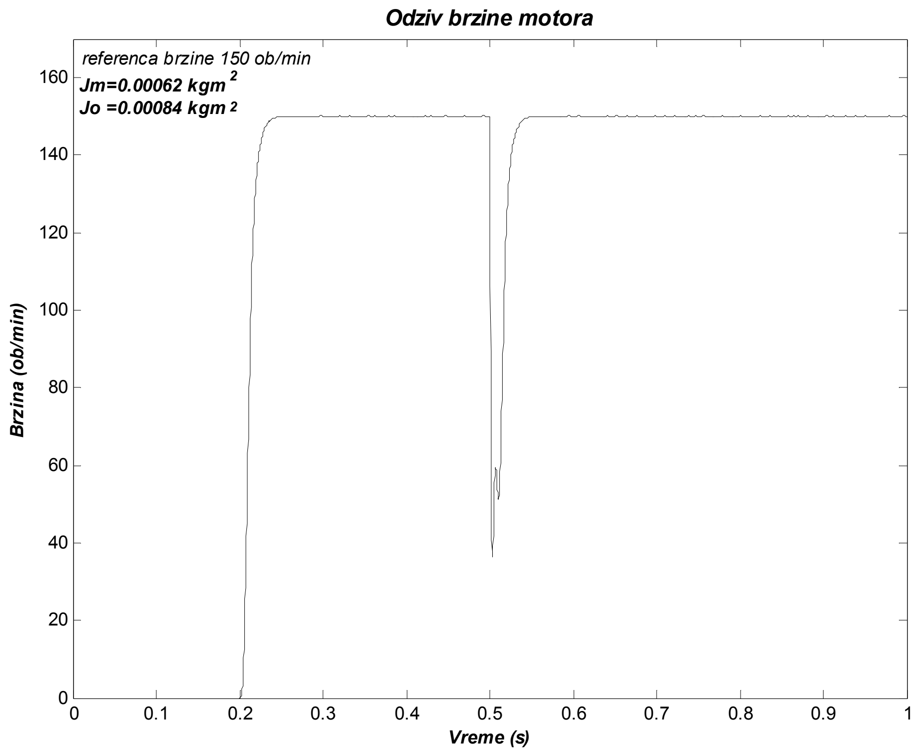
Слика 6.27. Одзив електромагнетног момента мотора за регулатор број 3.

Анализом датих дијаграма види се да, како се полови опсервера приближавају координатном почетку z – равни, долази до малог побољшања у динамици и смањеној валовитости одзива брзине серво система (регулатор број 1 и број 2). Упоређивањем одзива брзине између регулатора број 1 и број 2 може се приметити осим смањења валовитости брзине и смањење утицаја поремећаја на одзив брзине мотора, али се при томе повећава валовитост ("рипл") електромагнетног момента мотора.

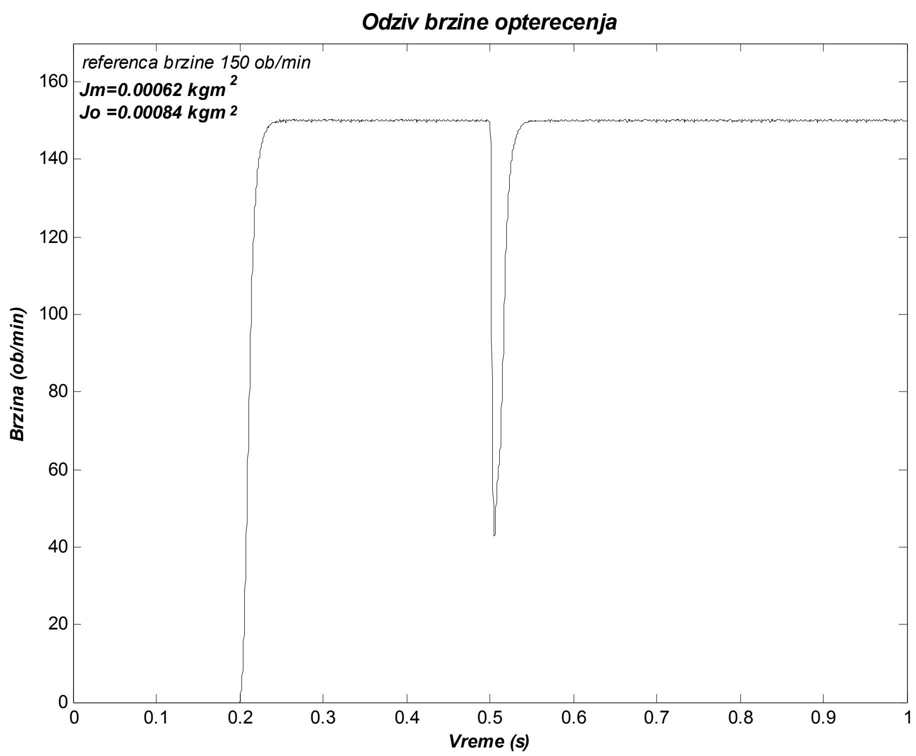
Са друге стране, даљим приближавањем полова опсервера координатном почетку z – равни, систем у затвореној спрези се креће га зони граничне стабилности што резултује неприхватљивим перформансама, што се види из примера серво система са регулатором број 3, где се анализом одзива брзине и момента мотора види да се серво систем налази на ивици стабилног рада, при чему су и одзив брзине мотора, као и одзив електромагнетног момента мотора неприхватљиви.

6.3.2 Утицај промене момента инерције мотора и оптерећења на карактеристике регулатора

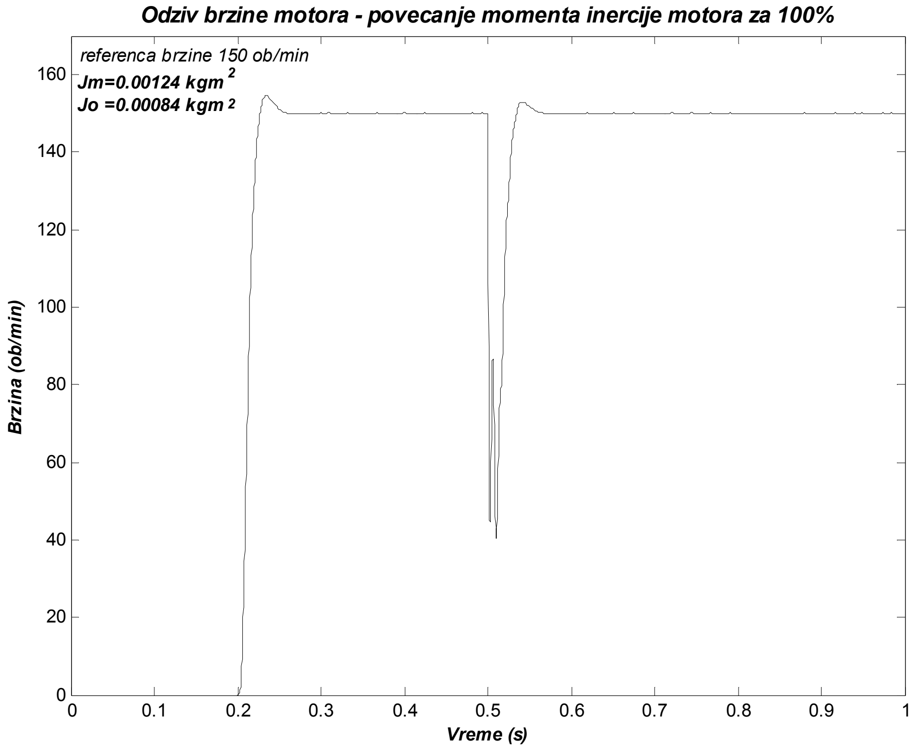
Сада ћемо испитати утицај промене момента инерције мотора и оптерећења на одзив брзине и електромагнетни моменат мотора. У том циљу сагледаћемо дијаграме одзива брзине мотора на задату референцу брзине од 150 об/мин у виду степ сигнала у временском тренутку t=0.2 s и дејство поремећаја у виду момента оптерећења $M_{opt} = M_{nom} = 5.7\ Nm$, који као степ сигнал делује у временском тренутку t=0.5 s.



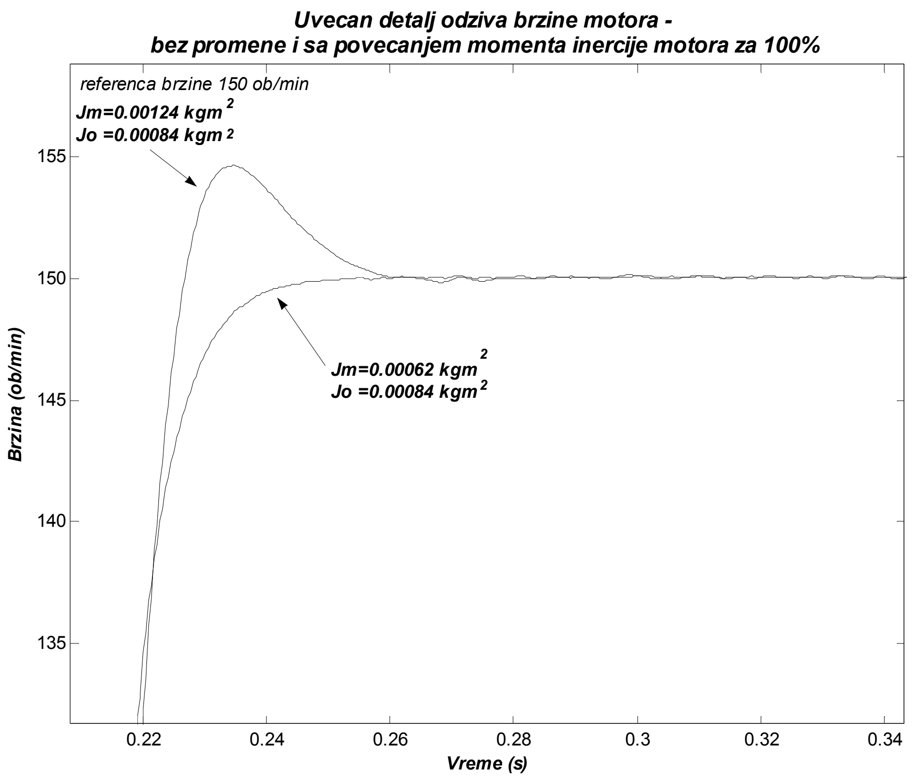
Слика 6.28. Одзив брзине мотора при номинално подешеном регулатору.



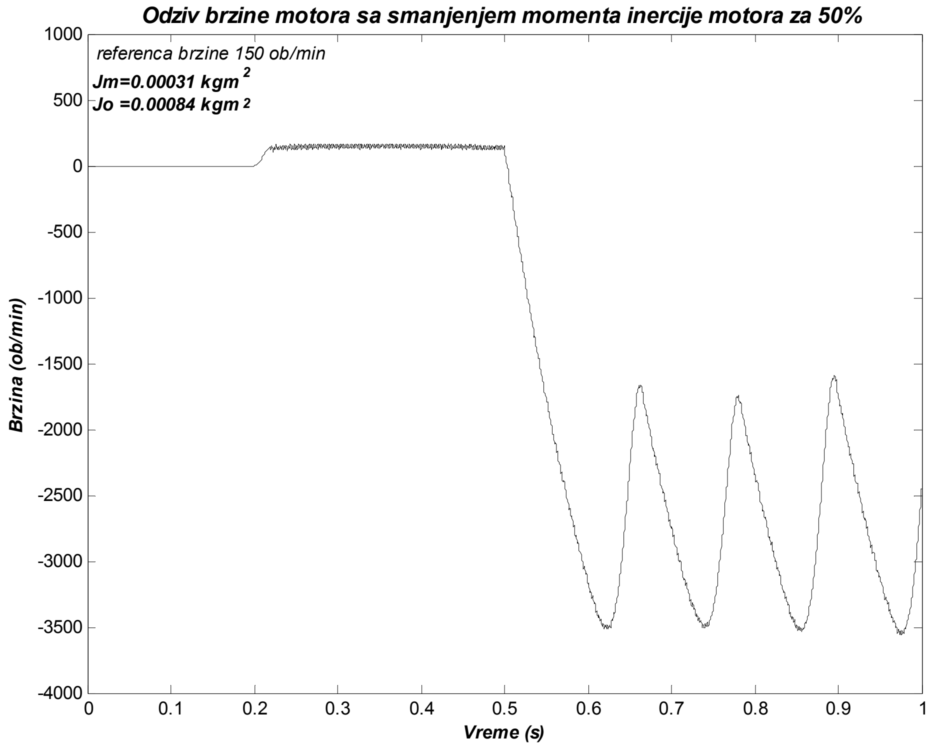
Слика 6.29. Одзив брзине оптерећења при номинално подешеном регулатору.



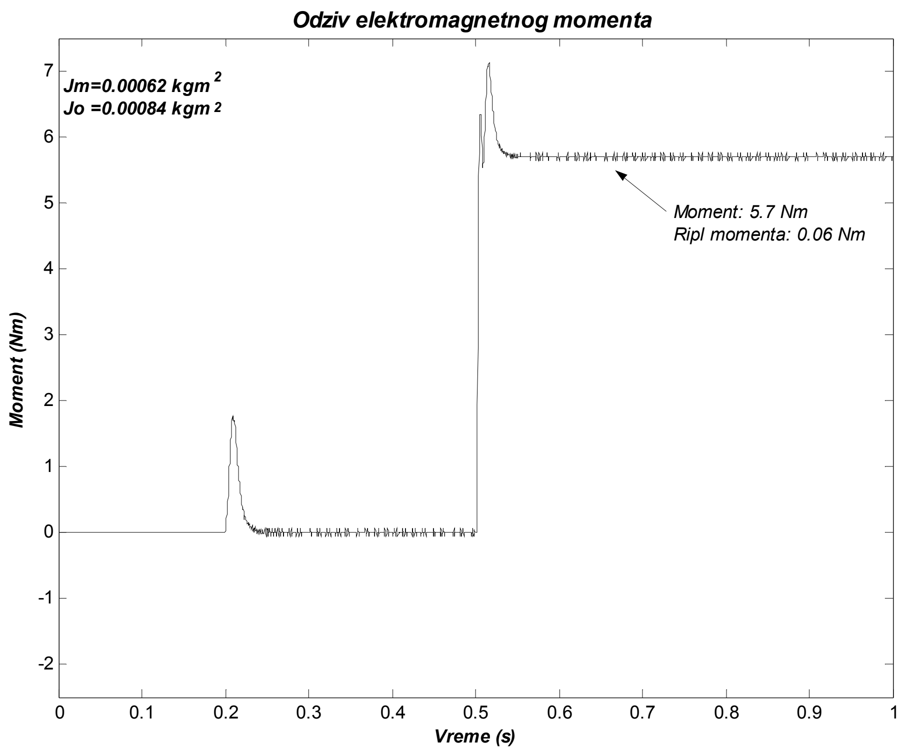
Слика 6.30. Одзив брзине мотора при повећању момента инерције мотора за 100%.



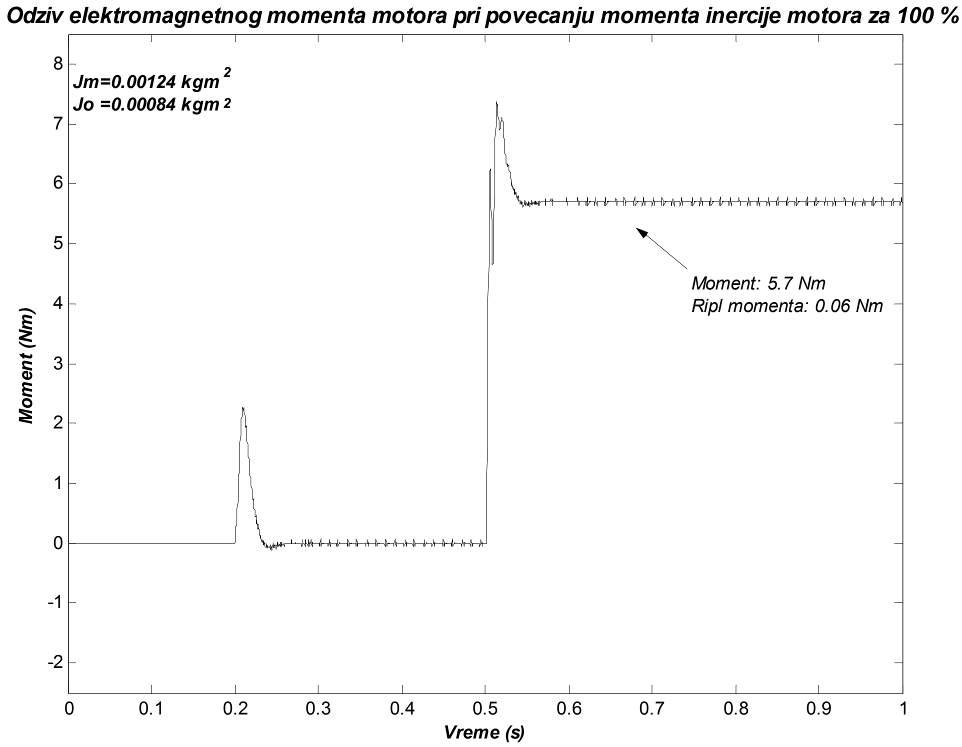
Слика 6.31. Увећан детаљ упоредног приказа одзива брзине мотора при номиналним параметрима и при повећању момента инерције мотора за 100%.



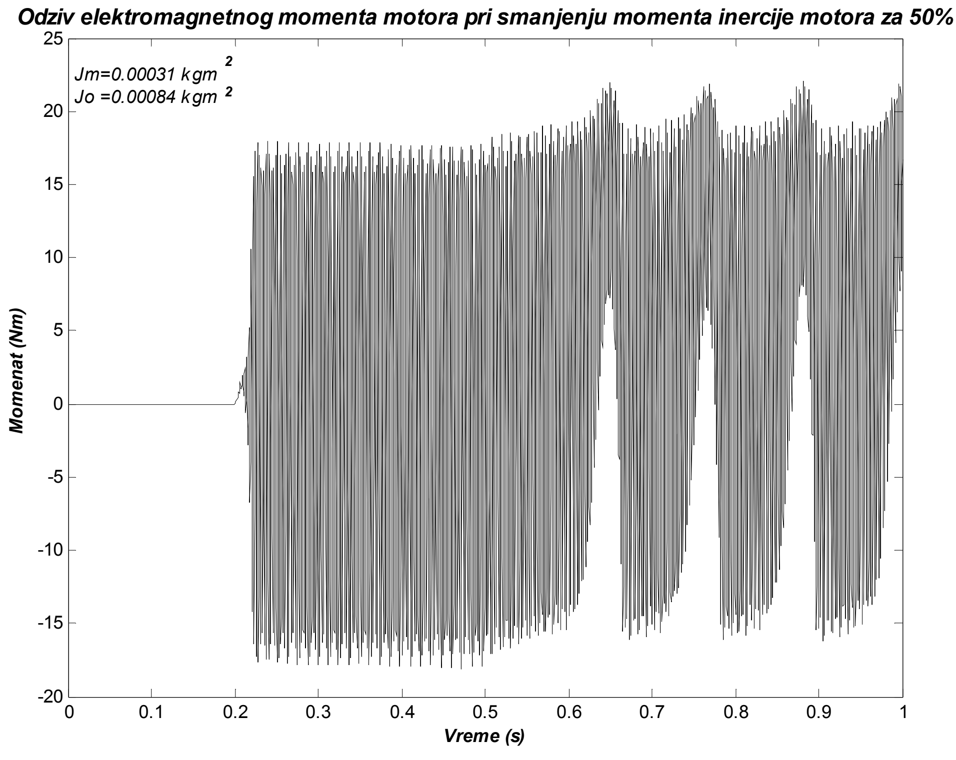
Слика 6.32. Одзив брзине мотора при смањењу момента инерције мотора за 50%.



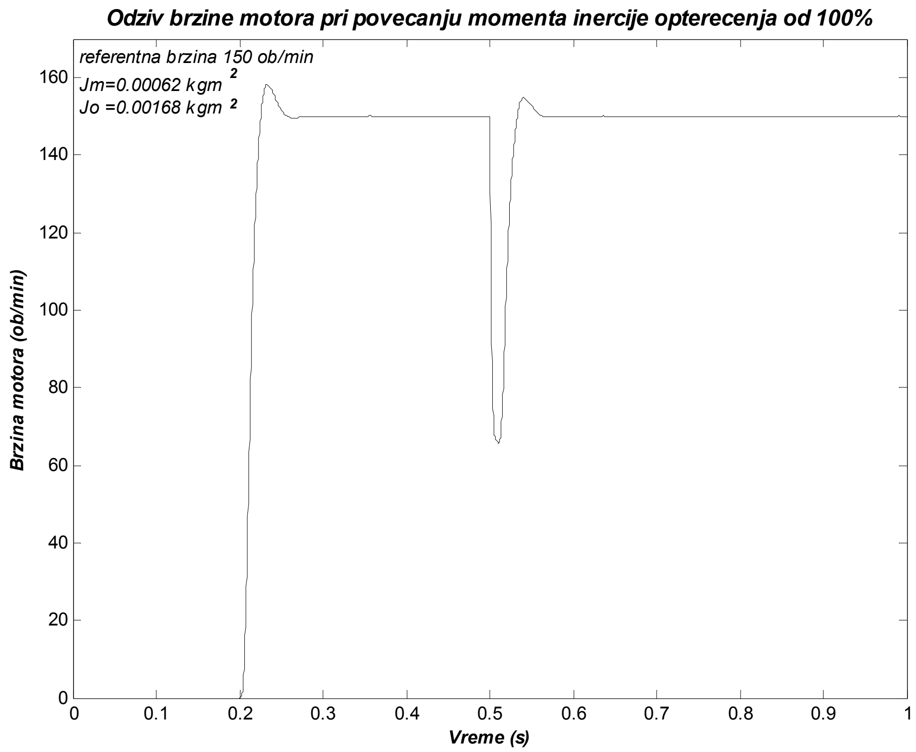
Слика 6.33. Одзив електромагнетног момента мотора при номиналним парамтерима.



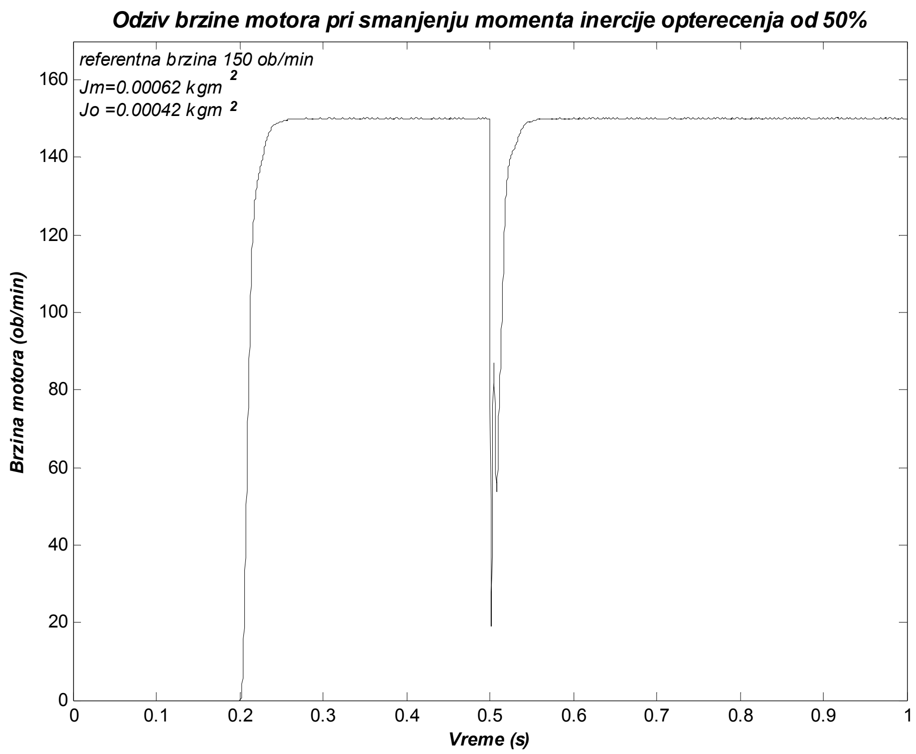
Слика 6.34. Одзив електромагнетног момента мотора при повећању момента инерције мотора за 100%..



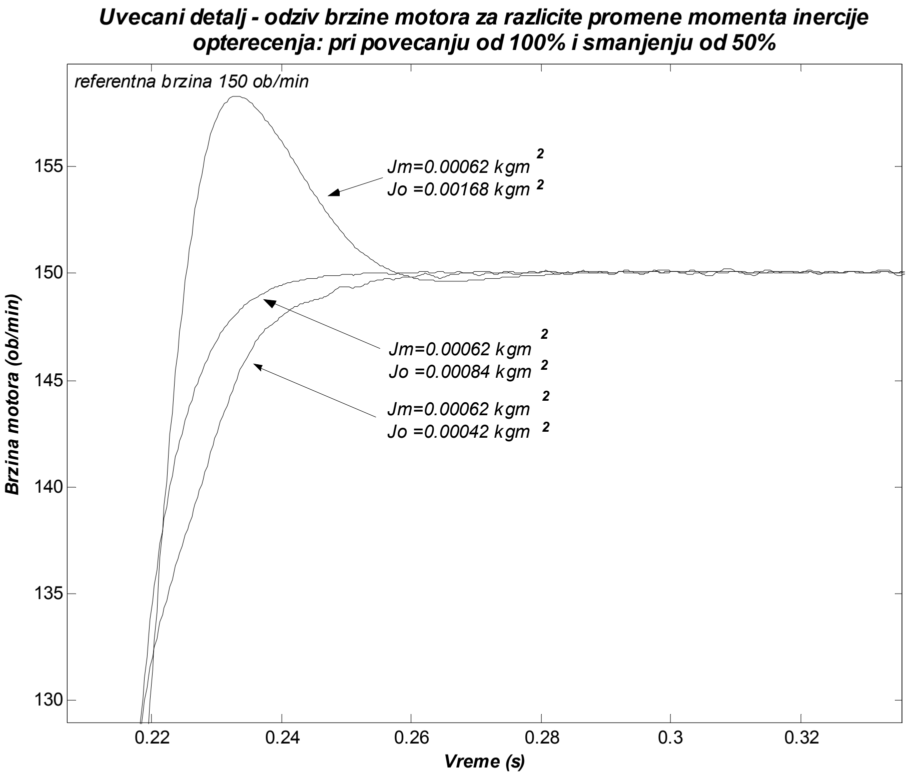
Слика 6.35. Одзив електромагнетног момента мотора при смањењу момента инерције мотора за 50%..



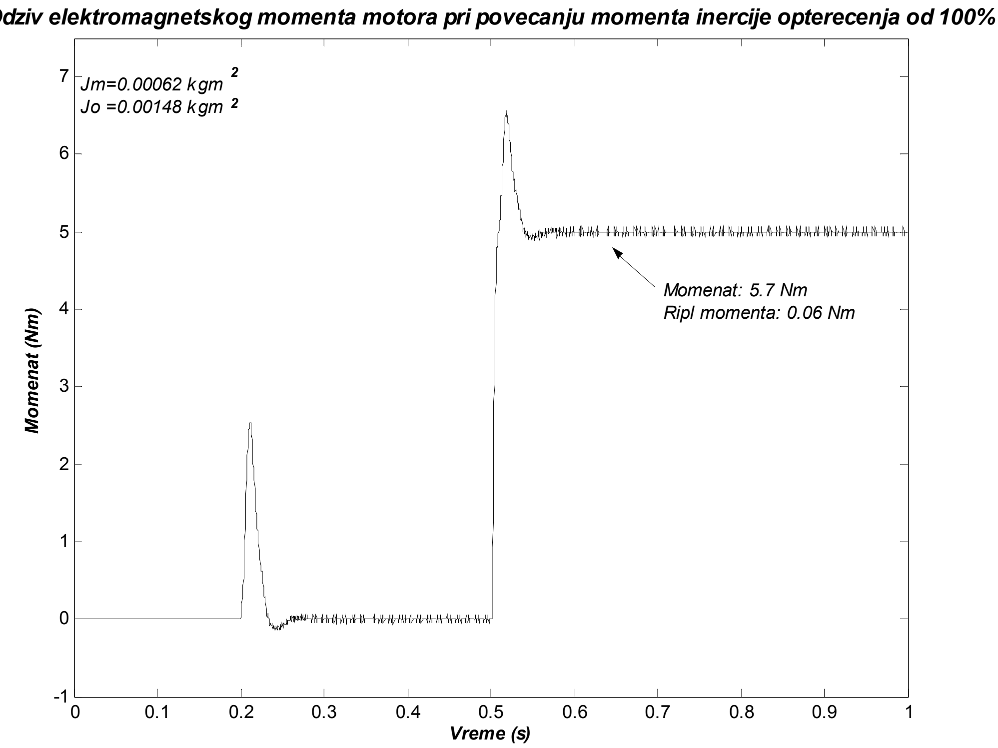
Слика 6.36. Одзив брзине мотора при повећању момента инерције оптерећења за 100%.



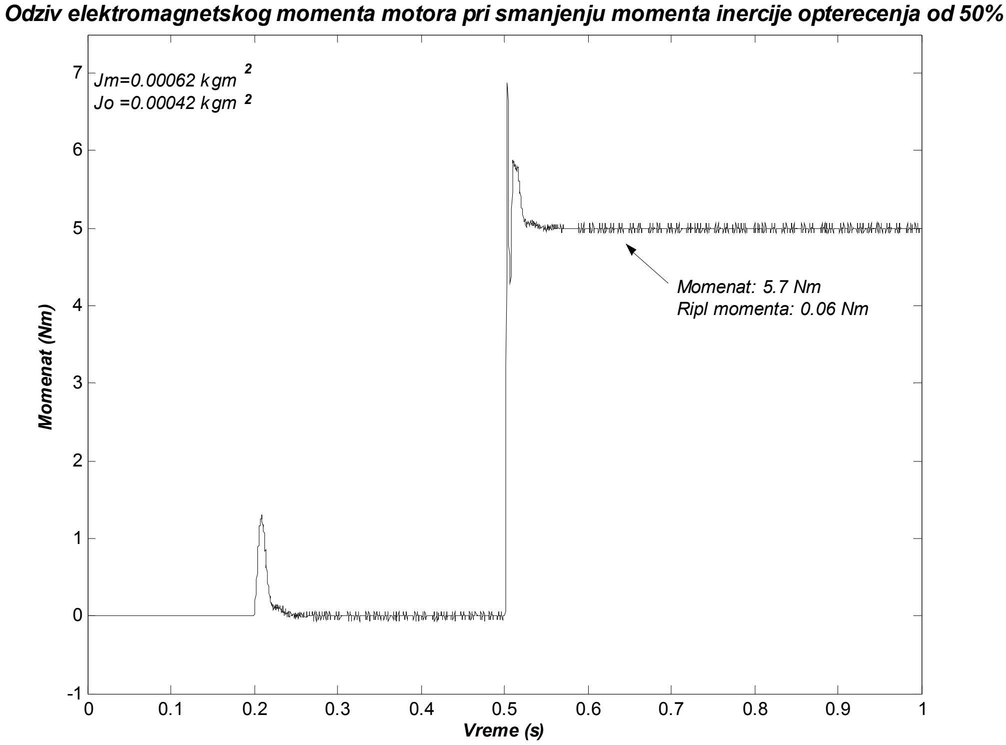
Слика 6.37. Одзив брзине мотора при смањењу момента инерције оптерећења за 50%.



Слика 6.38. Увећан детаљ упоредног приказа одзива брзине мотора при номиналним параметрима, при повећању момента инерције оптерећења за 100% и при смањењу момента инерције оптерећења за 50%.



Слика 6.39. Одзив електромагнетног момента мотора при повећању момента инерције оптерећења за 100%.



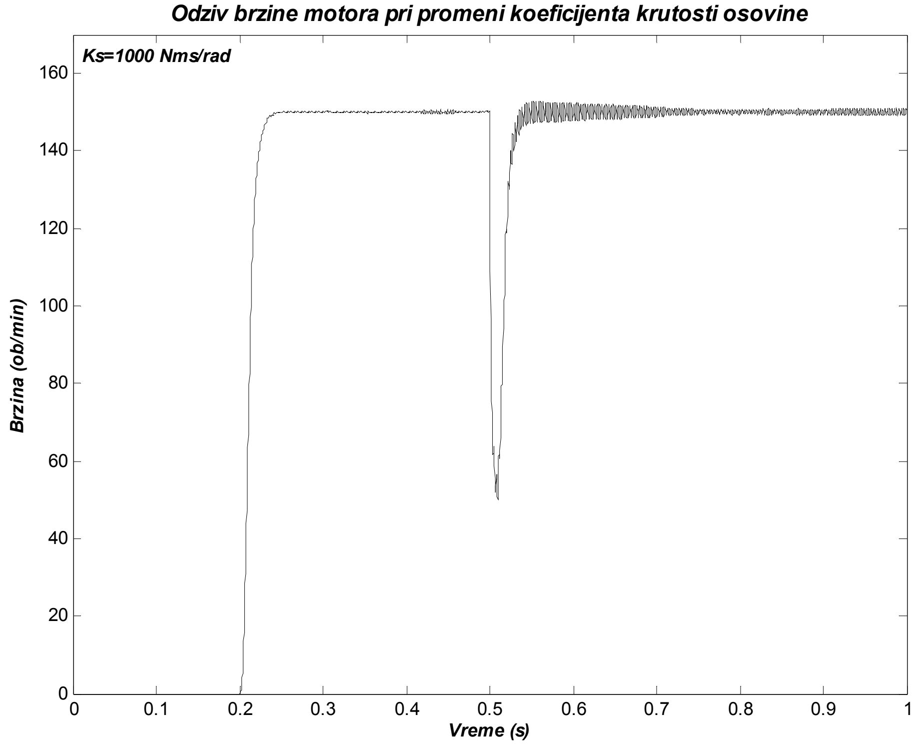
Слика 6.40. Одзив електромагнетног момента мотора при смањењу момента инерције оптерећења за 50%.

Анализом дијаграма изведених симулација може се видети да се при повећању момента инерције мотора деградира одзив брзине тако што долази до појаве прескока при одзиву на задату референтну вредност. Одзив електромагнетног момента мотора се мало мења у смислу транзијентних вредности, док у устаљеном стању његова валовитост на истом нивоу, као и у случају кофигурације серво система са номиналним параметрима (за које је регулатор пројектован). Са друге стране, види се да се при смањивању момента инерције мотора значајно деградира како одзив брзине, тако и одзив електромагнетног момента мотора, до неприхватљивих вредности. Ипак, ситуација при чему долази до промене момента инерције мотора, а поготово до смањења момента инерције мотора, у реалним серво системима је ретка, можемо рећи да је практично и нема, јер се углавном може мењати момент инерције оптерћења.

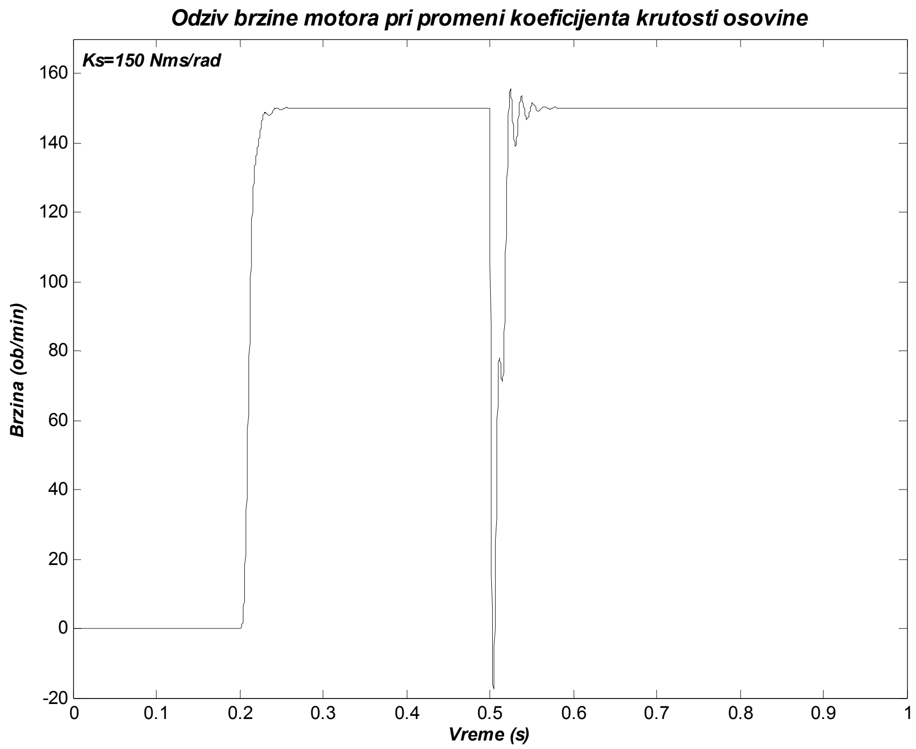
При промени момента инерције оптерећења може се видети да се при повећању момента инерције оптерећења деградира одзив брзине тако што долази до појаве прескока при одзиву на задату референцу. Такође, до мањих деградација у одзиву брзине мотора долази и при смањењу момента инерције оптерећења, при чему више нема појаве прескока, већ прелазна појава остаје апериодична, али са мањом динамиком. Што се тиче момента мотора у оба случаја постоје мање промене у одзиву у смислу транзијентних вредности, а у устаљеном стању рипл момента мотора остаје на истом нивоу као и пре промене параметара.

6.3.3 Утицај промене коефицијента крутости осовине на карактеристике регулатора

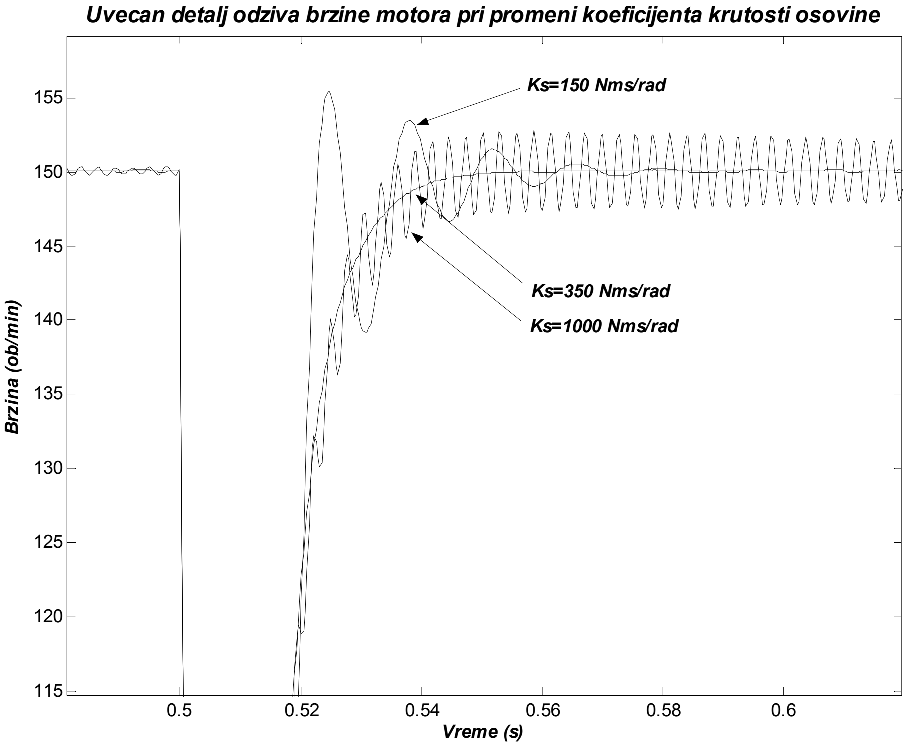
Сада ћемо испитати утицај промене коефицијента крутости осовине на одзив брзине и електромагнетни моменат мотора. У том циљу сагледаћемо дијаграме одзива брзине мотора на задату референцу брзине од 150 об/мин у виду степ сигнала у временском тренутку t=0.2 s дејство поремећаја у виду момента оптерећења $M_{opt} = M_{nom} = 5.7\ Nm$, који као степ сигнал делује у временском тренутку t=0.5 s.



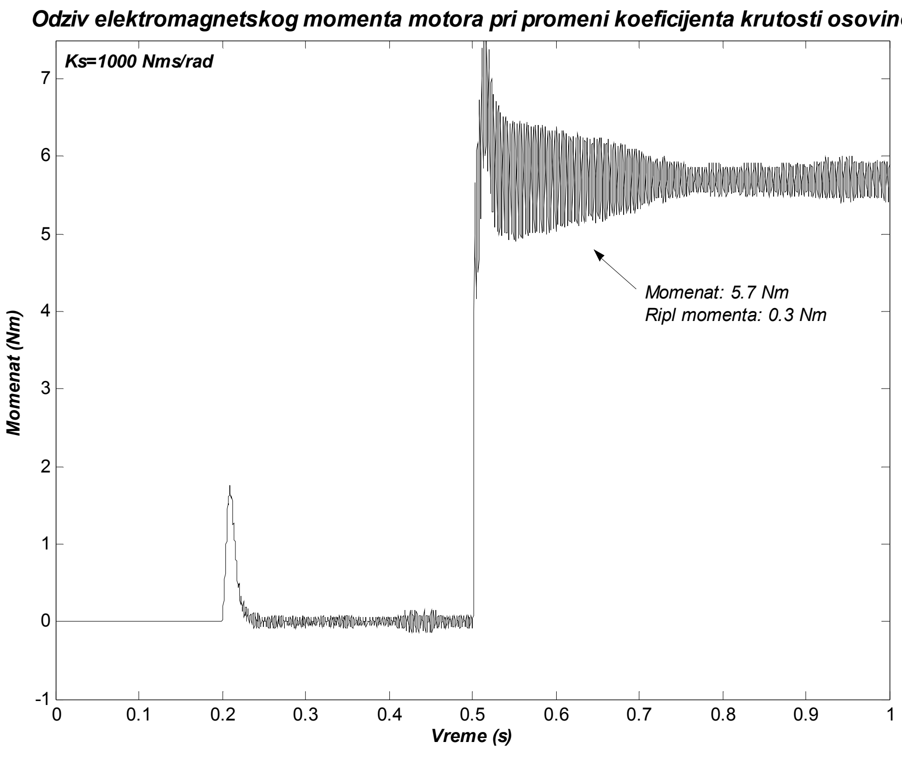
Слика 6.41. Одзив брзине мотора при повећању коефицијента крутости осовине.



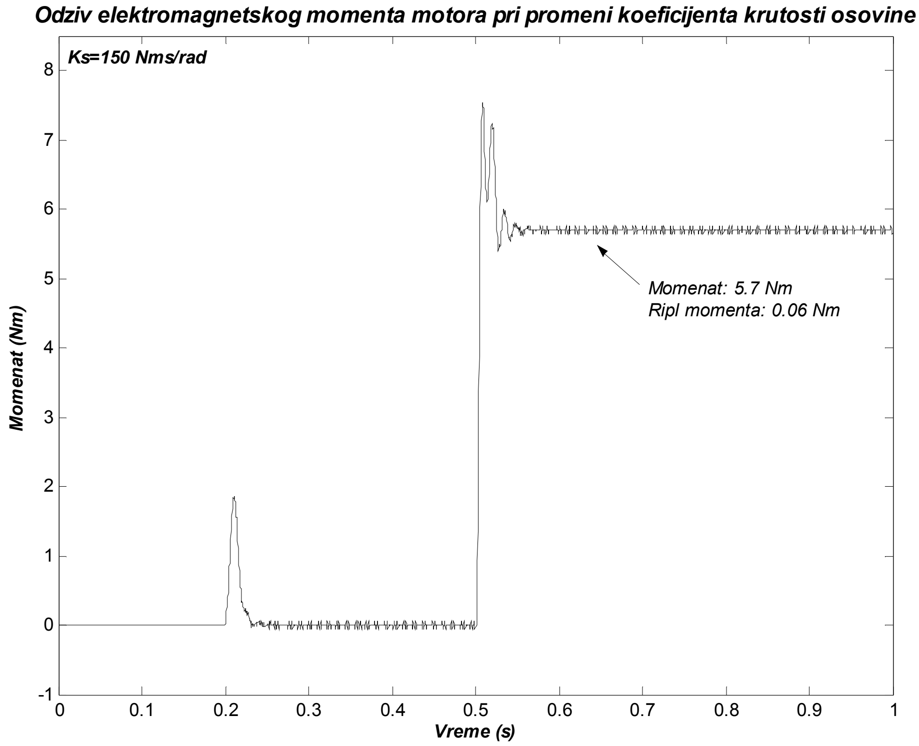
Слика 6.42. Одзив брзине мотора при смањењу коефицијента крутости осовине.



Слика 6.43.Увећани детаљ упоредног одзив брзине мотора при промени коефицијента крутости осовине, у тренутку деловања поремећаја у виду момента оптерећења.



Слика 6.44.Одзив електромангетног момента мотора при повећању коефицијента крутости осовине.

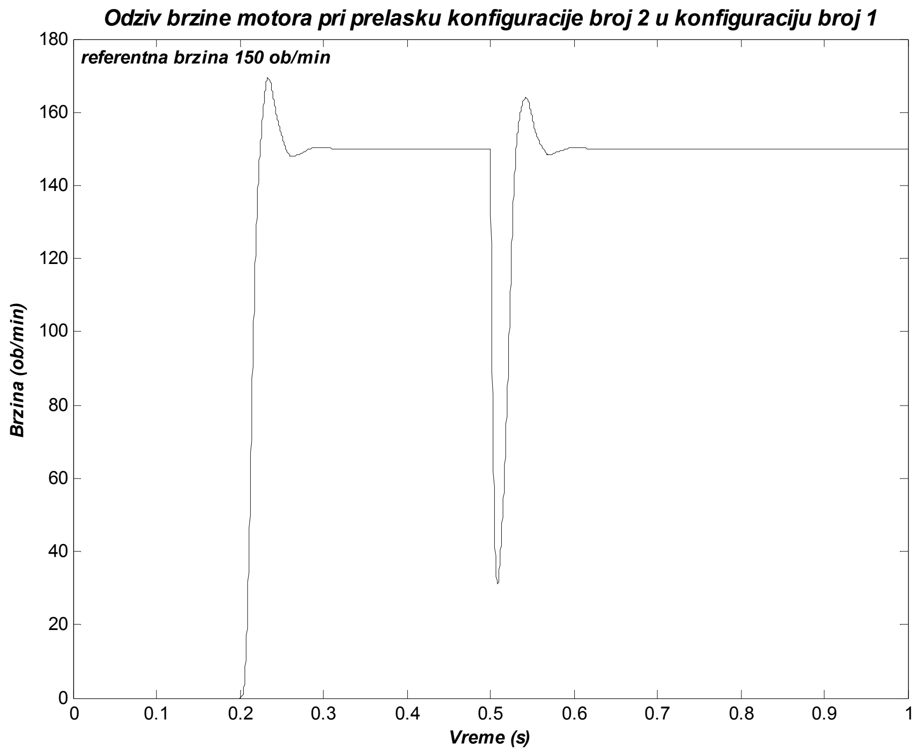


Слика 6.45.Одзив електромангетног момента мотора при смањењу коефицијента крутости осовине.

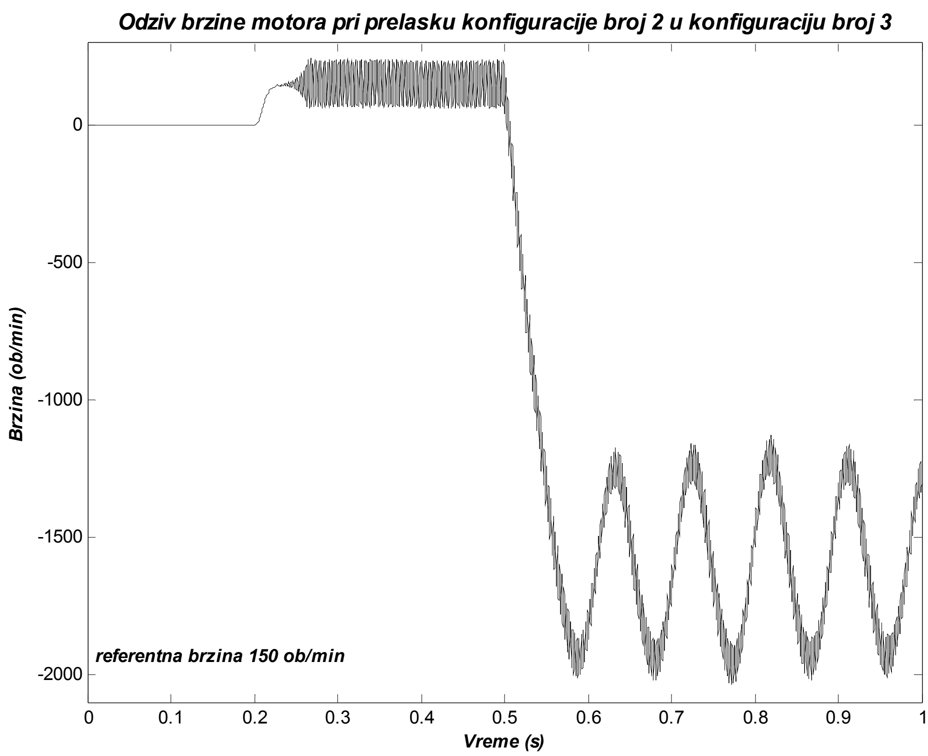
Анализом приложених дијаграма видети се да се при повећању коефицијента крутости осовине деградира одзив брзине тако што долази до повећања валовитости брзине и електромагнетног момента мотора. При смањењу коефицијента крутости осовине долази до мањих промена у динамици одзива, али валовитости брзине и електромагнетног момента мотора остаје на истом нивоу, као пре промене. Анализом слике 6.41. види се да се у прелазном режиму који настаје при деловању константног поремећаја у виду момента оптерећења, појављују пригушено-осцилаторни модови чија учестаност и време ишчезавања расте са порастом вредности коефицијента крутости осовине.

6.3.4 Утицај симултане промене више карактеристичних параметара на перформансе регулатора

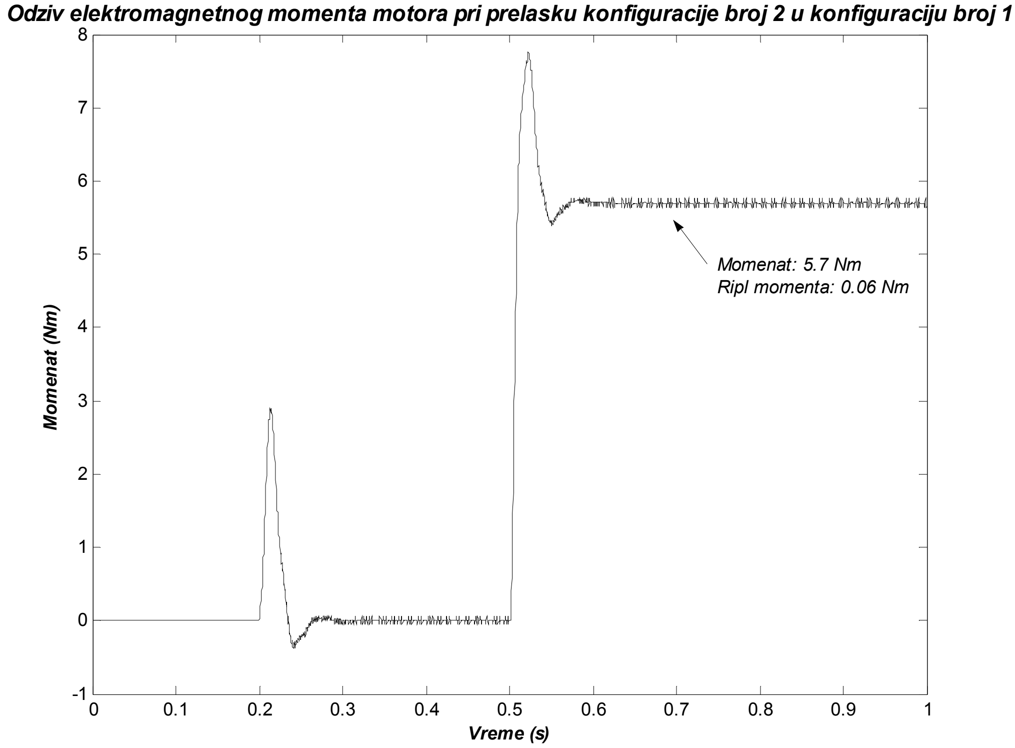
У оквиру овог одељка ћемо испитати утицај симултане промене више карактеристичних параметара на одзив брзине и електромагнетни моменат мотора. На примеру конфигурације број 2 (или како смо је назвали "средња") биће испитане перформансе пројектованог регулатора уколико се конфигурација погона промени у остале две конфигурације погона ("мека" и "тврда"), а које су дефинисане у одељку **6.1.1.**, табела 6.1. У том циљу сагледаћемо, као и у претходним случајевима, дијаграме одзива брзине мотора на задату референцу брзине од 150 об/мин у виду степ сигнала у временском тренутку t=0.2 s дејство поремећаја у виду момента оптерећења $M_{opt} = M_{nom} = 5.7\ Nm$, који као степ сигнал делује у временском тренутку t=0.5 s.



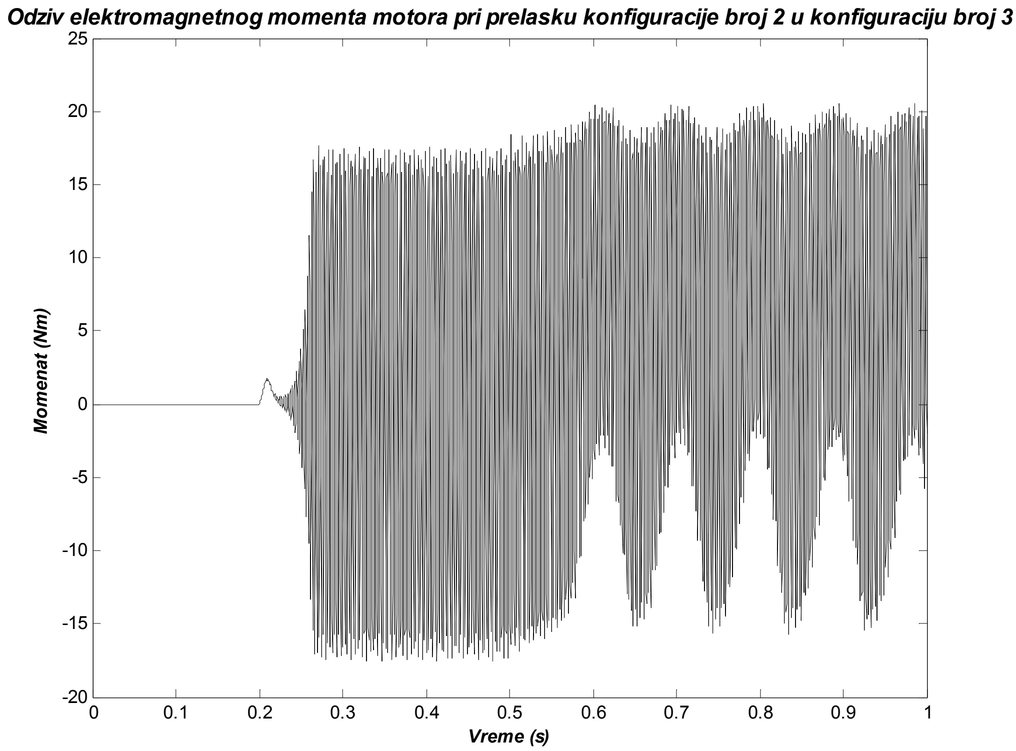
Слика 6.46.Одзив брзине мотора при преласку кофигурације погона број 2 у конфигурацију погона број 1.



Слика 6.47.Одзив брзине мотора при преласку кофигурације погона број 2 у конфигурацију погона број 3.



Слика 6.48.Одзив електромагнетног момента мотора при преласку кофигурације погона број 2 у конфигурацију погона број 1.

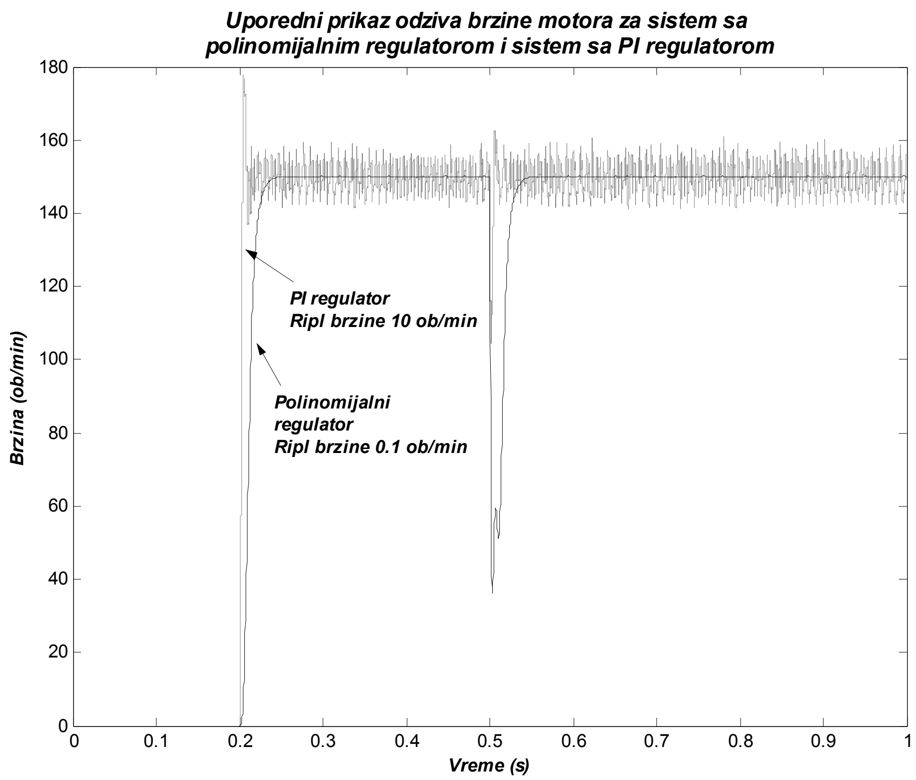


Слика 6.49.Одзив електромагнетног момента мотора при преласку кофигурације погона број 2 у конфигурацију погона број 3.

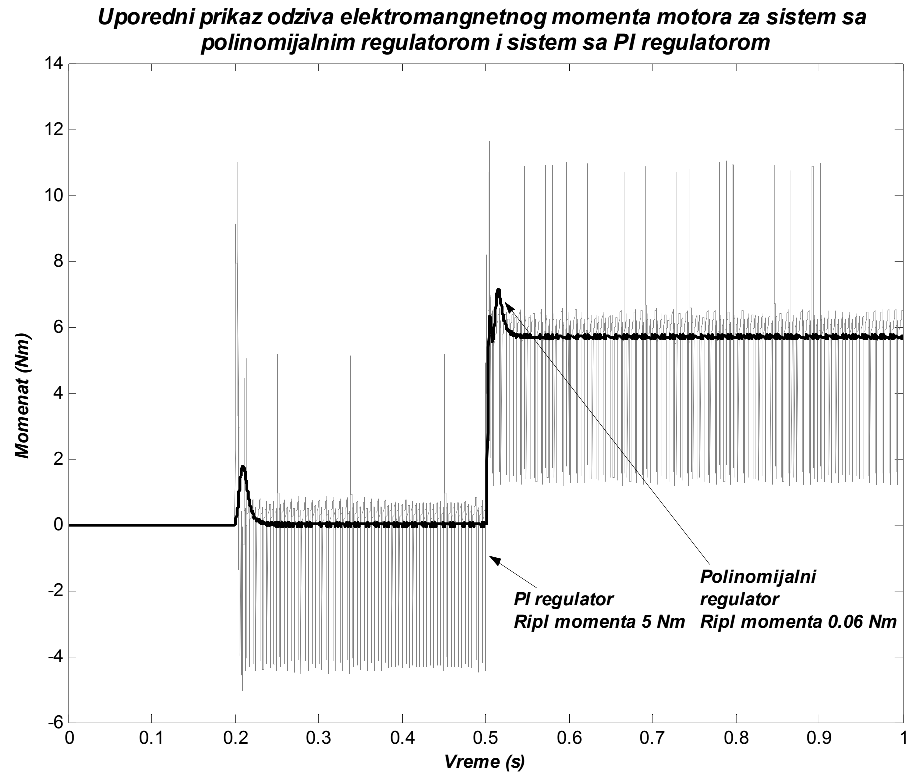
Анализом дијаграма изведених симулација може се видети да се при преласку кофигурације погона број 2 у конфигурацију погона број 1 деградира одзив брзине тако што долази до појаве прескока при одзиву на задату референтну вредност. Одзив електромагнетног момента мотора се мало мења у смислу транзијентних вредности, док у устаљеном стању његова валовитост на истом нивоу, као и у случају кофигурације серво система са номиналним параметрима (за које је регулатор пројектован). Са друге стране, при преласку кофигурације погона број 2 у конфигурацију погона број 3, види се да се серво систем налази на ивици стабилног рада, при чему су значајно деградирани како одзив брзине, тако и одзив електромагнетног момента мотора,. до неприхватљивих вредности.

6.3.5 Упоређивање перформанси одзива серво система са полиномијалним регулатором и стандардним PI регулатором

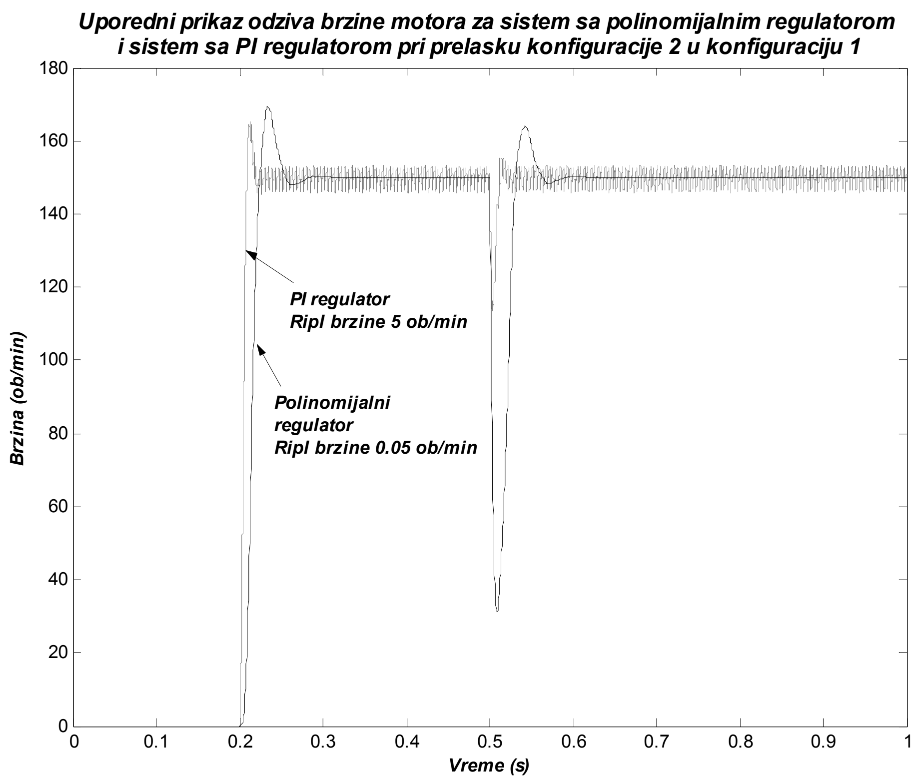
На крају извршићемо упоређивање перформанса пројектованог регулатора методом подешавања полова и класичног регулатора брзине пропорционално-интегралног (**PI**) дејства у инкременталној форми, чији су параметри одређени према [26], [27]. Ово испитивање ћемо извршити на два примера: за иницијално подешене параметре и уколико се конфигурација погона промени из конфигурације број 2 у конфигурацију 1. У том циљу сагледаћемо, као и у претходним случајевима, дијаграме одзива брзине мотора на задату референцу брзине од 150 об/мин у виду степ сигнала у временском тренутку t=0.2 s дејство поремећаја у виду момента оптерећења $M_{opt} = M_{nom} = 5.7\ Nm$, који као степ сигнал делује у временском тренутку t=0.5 s.



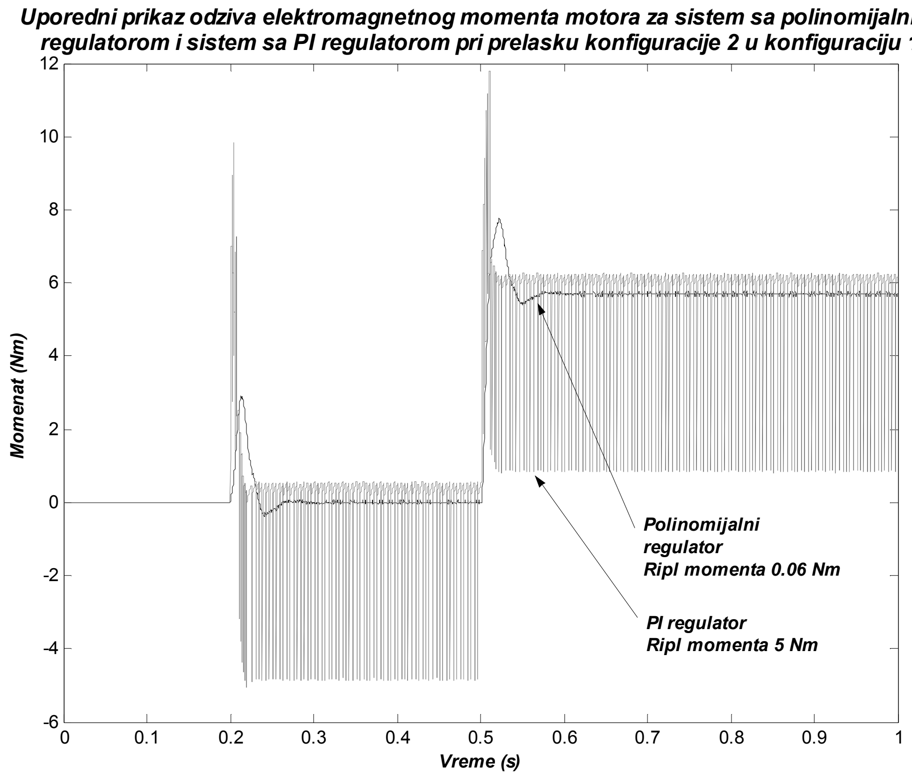
Слика 6.50.Упоредни приказ одзива брзине мотора за систем са полиномијалним регулатором и систем са PI регулатором при номиналним параметрима погона.



Слика 6.51.Упоредни приказ одзива електромагнетног момента мотора за систем са полиномијалним регулатором и систем са PI регулатором при номиналним параметрима погона.



Слика 6.52.Упоредни приказ одзива брзине мотора за систем са полиномијалним регулатором и систем са PI регулатором при параметра погона при преласку погона из конфигурације2 у конфигурацију 1.



Слика 6.53.Упоредни приказ одзива електромагнетног момента мотора за систем са полиномијалним регулатором и систем са PI регулатором при параметра погона при преласку погона из конфигурације2 у конфигурацију 1.

Анализом упоредног приказа одзива брзине мотора за систем са полиномијалним регулатором и систем са **PI** регулатором када су параметри погона номинални (слика 6.50.), може се видети да је динамика одзива брзине система са **PI** регулатором нешто боља од динамике одзива брзине мотора за систем са полиномијалним регулатором. Наиме, систем са полиномијалним регулатором постиже референтну вредност за око 30 ms спорије у односу на погон са **PI** регулатором. Међутим боља динамика погона са **PI** регулатором резултује са око 100 пута већом таласности како брзине тако и електромагнетног момента, будући да је рипл брзине код система са **PI** регулатором 10 об/мин у односу на рипл од 0,1 об/мин код погона са полиномијалним регулатором. Слична ситуација је и када је у питању таласност електромагнетног момента мотора; рипл електромагнетног момента мотора код погона са PI регулатором је 5 Nm, док је код погона са полиномијалним регулатором поменута валовитост у стационарном стању далеко мања, и износи свега 0,06 Nm.

Слична ситуација је и при преласку кофигурације погона број 2 у конфигурацију погона број 1. Динамика погона са **PI** регулатором је нешто боља од динамике система са полиномијалним регулатором. Код потоњег долази до за нијансу већег прескока у одзиву брзине, али као и у претходном случају боља динамика погона са **PI** регулатором резултује са око 100 пута већом таласности како брзине тако и електромагнетног момента, што представља озбиљан недостатак.

Из приложених рачунарских симулација и начињених анализа види се да се у серво системима са дистрибуираним масама постижу далеко боље перформансе при употреби полиномијалних регулатора него када се употребљавају стандардни **PI** регулатори.

7 ОДРЕЂИВАЊЕ ДИСКРЕТНОГ МОДЕЛА ЛАБОРАТОРИЈСКОГ СЕРВО ПОГОНА СА ЕЛАСТИЧНО СПРЕГНУТИМ МАСАМА ТЕХНИКОМ ИДЕНТИФИКАЦИЈЕ СИСТЕМА

У оквиру овог поглавља за један конретан серво погон са еластично спрегнутим масама биће приказан алгоритам за идентификацију функције преноса датог система и даће се резултати те идентификације, на основу којих ће се у наставку овог поглавља извршити пројектовање дигиталног закона управљања методом подешавања полова. У првом одељку ће се најпре изнети неке теоријске основе научне дисциплине која се бави идентификацијом система, док ће се у другом одељку дати кратак опис лабораториског setup-а. У трећем одељку биће приказан сам процес идентификације лабораторијског серво погона са еластично спрегнутим масама и добијени резултати, док ће у четвртом одељку бити извршена синтеза регулатора методом подешавања полова и сагледаће се његове карактеристике.

7.1 ИДЕНТИФИКАЦИЈА СИСТЕМА

Идентификација система представља скуп разних поступака који у различитим условима решавају проблем постављања математичког модела неког динамичког система, на основу експериментално добијених података са реалног објекта заснованих на мерењу улаза и излаза.. Другим речима, идентификација система представља експерименталан поступак моделирања објекта који се поставља у виду функције дискретног преноса, и заснива се на мерењу улаза и излаза објекта у коначном броју тренутака. Измерени сигнали се потом процесирају у оквиру алгоритама обраде мерних података чији је циљ довољно тачна процена модела, тако да разлика између реалног објекта и његовог математичког модела буде што је могуће мања. Ово се постиже подешавањем параметара датог модела све док се његов излаз не подудари што је могуће боље са измереним излазом за исту побуду.

Могући су различити начини класификације метода идентификације. Један од начина је на основу тренутка у коме се врши идентификација система. Методе код којих се процена параметара модела врши у току нормалног рада објекта управљања сврставају се у класу ***on-line*** метода идентификације. Ако се при томе процесирање мерних података са циљем идентификације параметара модела врши после сваке периоде одабирања, реч је о **идентификацији у реалном времену** која игра важну улогу у структури управљања адаптивним дигиталним системима. С друге стране, постоји широка класа ***off-line*** метода идентификације које, такође, могу користити улазне и излазне сигнале који постоје у нормалном режиму рада, али код којих се експериментално добијени подаци региструју и тек касније обрађују – ван времена реалног рада система (*batch processing*). У неким случајевима ***off-line*** идентификације не користе се нормални (радни) улазни сигнали система, већ специјални тестирајући улазни сигнали.

Са друге стране, у погледу самог модела, техника идентификације се користи на велики број форми модела, мада су најчешће у питању модели засновани на опису диференцним једначинама (као што су ARX и ARMAX модели који ће детаљније бити приказани у наставку), као и на различитим моделима у простору стања, које називамо **параметарским моделима**, мада процес идентификације може резултовати и **непараметарским моделима**.

Параметарска естимација има за циљ налажење како структуре модела, тако и параметара модела који највише одговарају у датом случају радних података. **Радни подаци** или подаци који се користе за естимацију, су подаци о мерењима улаза и излаза система који се користе у процесу идентификације система. Даље се дефинишу методи за параметарску идентификацију, који представљају технике за естимацију параметара за дату структуру модела у смислу познатих степена полинома у имениоцу и бројиоцу функције преноса и познатом кашњењу. У основи ових метода је да се путем нумеричких прорачуна изврши налажење нумеричких вредности параметара који дају најбоље слагање између излаза модела (симулираног, односно предикованог) и измереног излаза. Са друге стране, постоје и методи за непараметарску идентификацију, који представљају технике за естимирање понашања модела без коришћења модела описаног диференцним једначинама. Типични алгоритми који се користе при непараметарској идентификацији су **Корелациона анализа** која естимира импулсни одзив система и **Спектрална анализа** која естимира фреквентни одзив система.

Даље, у погледу метода естимације, развијено је више алгоритама процене параметара. Ти алгоритми се јављају у различитим варијантама. Наиме, уколико се примењује ***off-line*** идентификација користе се нерекурзивне варијанте алгоритама процене параметара. Уколико је пак циљ ***on-line*** идентификација у реалном времену, користе се рекурзивне варијанте алгоритама процене параметара.

Једно од важних ограничења идентификације система је да се односи на **линеарне** системе. У случају нелинеарних система, уколико је могуће, врши се нелинеарна трансформација измерених података на основу физичког познавања модела и очекиваних нелинеарности у моделу тако да се дође до модела који је линеаран према трансформисаним подацима.

Такође је на овом месту неопходно дефинисати неке од израза који се користе при идентификацији система. **Валидациони подаци** или подаци за валидацију, је сет измерених података о мерењу улаза и излаза система који се идентификује, над којим није вршена идентификација модела. Користе се за добијање излаза рачунарском симулацијом одзива идентификованог модела на улазни сет података, а потом и упоређивање добијеног (симулираног) излаза са стварним (измереним) излазом. Наиме, добар приступ за процену ваљаности модела је да се упореде излази модела и реалног система на измереном сету података улаза и излаза који нису коришћени у процесу идентификације тј. "фитовања" модела. Осим тога, корисно је тестирати ваљаност модела и на основу увида у разлику између симулираног и стварног излаза тзв. "остатака" ("residuals"), који не смеју да буду у корелацији са излазом система.

По извршеној идентификацији, на различите начине вршимо увид у неке од одлика модела. То могу бити: дијаграм нула и полова модела, транзијентни одзив модела (импулсни одзив и одзив на степ побуду) и фреквентни одзив модела (амплитудска и фазна фреквентна карактеристика). Такође, на различите начине можемо сагледавати неке од одлика радних и валидационих података, од приказа датих података у времену, до спектра сигнала, односно садржаја у фреквентном домену, као што је периодограм.

Идентификацију често вршимо над више модела истог типа, који се разликују по структури у смислу степена полинома у имениоцу и бројиоцу функције преноса и кашњењу. Овакве фамилије модела називамо **сетови модела** или **структуре модела**.

На крају остаје и **процес валидације модела**, који подразумева различите увиде у одзив модела на различите валидационе податке, као и сагледавање одлика "остатака" тј. разлике између симулираног и стварног излаза.

7.1.1 Основни кораци у идентификацији система

Као што је већ речено, задатак идентификације система је да естимира модел система заснован на измереним подацима о одзиву система на задати улаз. Приступ овоме задатку подразумева више корака који ће укратко бити приказани у овом одељку.

Процедура детерминисања модела динамичког система из посматраних података о улазу и излазу састоји се из три основна сегмента:

- измерени подаци о одзиву излазан на познату улазну секвенцу – радни и валидациони подаци,
- сет модела (структура модела) који су могући "кандидати", и
- критеријум за селекцију одређеног модела у сету, заснован на информацијама које се налазе у радним и валидационим подацима (идентификациони метод).

Процес идентификације подразумева кружни циклус при чему се врши селектовање структуре модела, прорачун најбољег модела у структури и евалуација одлика тог модела. Овај циклус се може поделити на следеће кораке:

- **КОРАК 1** - Осмишљавање експеримента у коме је потребно измерити и само мерење одзива улаза и излаза процеса који треба бити идентификован.

- **КОРАК 2** - Испитивање добијених података. Вршење обраде података како би се уклонили трендови из добијених сигнала. Уклањање евентуалних нерегуларних делова података који су добијени услед грешке испитне мерне опреме. Вршење селекције дела оригиналних података над којима ће бити вршен процес идентификације – избор радних и валидационих података. У неким случајевима могуће је и филтрирање података како би се нагласили одређена важна фреквентна подручја која су од интереса.

- **КОРАК 3** - Селектовање и дефиниција сета модела (сета кандидата описа система) у оквиру којих је потребно наћи модел.

- **КОРАК 4** - Израчунати најбољи модел у структури модела у сагласности са радним и валидационим подацима и датим идентификационим методом.

- **КОРАК 5** - Испитати одлике добијеног модела.

Ако је модел задовољавајући, процес се завршава, а уколико није, узима се други сет модела (враћамо се на корак 3) или се испробавају други методи естимације (враћамо се на корак 4). Можда је потребно уложити и даљи рад на подацима који се користе за идентификацију (враћамо се на корак 1 и 2).

7.1.2 Теоријске поставке идентификације система

У овом одељку ћемо укратко изложити теоријске поставке на којима почива техника идентификације система у смислу врста параметарских модела и најчешће коришћеном алгоритму за естимацију – методе најмањих квадрата.

7.1.2.1 Дискретни модел процеса и сигнала

Претпоставља се да је динамички процес који се идентификује стабилан, временски инваријантан и линеаран тако да се његово понашање може описати линеарном диференцном једначином:

$$\begin{aligned} y_u(kT) + a_1 y_u(kT-T) + \ldots + a_m y_u(kT-mT) = \\ = b_1 u(kT-dT-T) + \ldots + b_m u(kT-dT-mT) \end{aligned}, \tag{7.1}$$

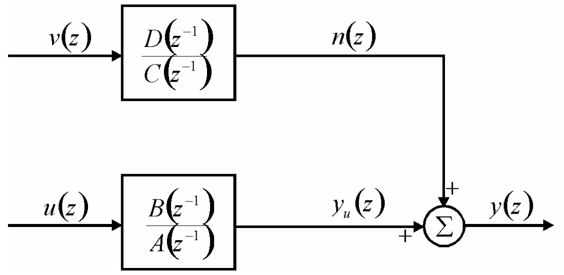
где су:

$$u(kT) = U(kT) - U_0 \ ,$$
$$y(kT) = Y(kT) - Y_0 \ , \tag{7.2}$$

разлике апсолутних вредности улаза *U(kT)* и излаза *Y(kT)* од вредности тих сигнала у стационарном стању U_0 и Y_0 ; *d* је позитивна целобројна костанта која означава транспортно кашњење ("мртво време" процеса).

На основу примене Z трансформације на једначину (7.1), може се написати функција дискретног преноса посматраног процеса као:

$$G_p(z) = \frac{y_u(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \cdot z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_m z^{-m}} \cdot z^{-d} \, . \tag{7.3}$$



Слика 7.1 Блок дијаграм модела процеса и поремећаја

Претпоставља се да је мерени сигнал на излазу објекта управљања контаминиран случајним сигналом *n(kT)* услед дејства поремећаја на објекат и присуства мерног шума, као што је приказано сликом 7.1.

За случајан сигнал *n(kT)* се претпоставља да се може описати као АРМА (<u>a</u>uto<u>r</u>egressive <u>m</u>oving <u>a</u>verage) модел, односно да се генерише на излазу замишљеног дигиталног филтра на чијем улазу делује немерљиви статистички независан шум *v(kT)* са нормалном расподелом амплитуда (дискретни бели шум), који се може описати на следећи начин:

$$\bar{v} = E\{v(kT)\} = 0 \ ,$$
$$\operatorname{cov}[v(kT), \tau] = E\{v(kT) \quad v(kT+\tau)\} = \sigma_v^2 \cdot \delta(\tau) \, . \tag{7.4}$$

У претходном изразу σ_v^2 је варијанса, а $\delta(\tau)$ је Кронецкер-ова делта функција:

$$\sigma_v^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left[v(kT) - \bar{v} \right]^2 \quad ,$$
$$\delta(\tau) = \begin{Bmatrix} 1 & za & \tau = 0 \\ 0 & za & \tau \neq 0 \end{Bmatrix} . \tag{7.5}$$

Функција дискретног преноса дигиталног филтра случајног сигнала је:

$$G_v(z) = \frac{n(z)}{v(z)} = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{1 + d_1 z^{-1} + \ldots + d_p z^{-p}}{1 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_p z^{-p}} \, . \tag{7.6}$$

На основу једначина (7.3) и (7.6) изводи се функција преноса система са слике 7.1:

$$y(z)=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}\cdot z^{-d}u(z)+\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}v(z). \tag{7.7}$$

Задатак параметарске идентификације се своди на естимацију параметара модела објекта и модела шума проценом коефицијената полинома $A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1})$ и $D(z^{-1})$, на основу измерених одбирака сигнала улаза и излаза објекта управљања. Претпоставља се при том да су редови полинома m и n као и мртво време процеса d познати *а приори*.

Шум контаминације *n(kT)* излаза *y(kT)* се претпоставља стационарним, тј. усваја се да полови полинома $C(z^{-1})$ леже унутар јединичног круга z равни.

Модел у једначини (7.7) се назива генералним моделом, "ARMA" моделом или "BJ" (Box-Jenkins) моделом. Осим овог модела разликујемо и следеће моделе који дају добре резултате у примени техника идентификације:

- "ARMAX " модел који се још назива и "ML " модел:

$$y(z)=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}\cdot z^{-d}u(z)+\frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})}v(z). \tag{7.8}$$

- "ARX " модел који се још назива и "LS" модел:

$$y(z)=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}\cdot z^{-d}u(z)+\frac{1}{A(z^{-1})}v(z). \tag{7.9}$$

- "OE " (Output-Error) модел:

$$y(z)=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}\cdot z^{-d}u(z)+v(z). \tag{7.10}$$

7.1.2.2 Нерекурзивна метода најмањих квадрата

Разматрајмо измерене одбирке сигнала излаза $y(k-1), y(k-2),..., y(k-m)$ и улаза $u(k-d-1), u(k-d-2),..., u(k-d-m)$ до неког тренутка k, и претпоставимо да су на неки начин процењене вредности параметара до претходних тренутака $k\text{-}1$. Означимо те процењене вредности са $\hat{a}_1(k-1), \hat{a}_2(k-1), \dots, \hat{a}_m(k-1), \hat{b}_2(k-1), \hat{b}_2(k-1), \dots, \hat{b}_m(k-1)$. Можемо тада писати:

$$\begin{aligned} y(k)&+\hat{a}_1(k-1)\,y(k-1)+\dots+\hat{a}_m(k-1)\,y(k-m)\\ &-\hat{b}_1(k-1)\,u(k-d-1)-\dots-\hat{b}_m(k-1)\,u(k-d-m)=e(k), \end{aligned} \tag{7.11}$$

где је *e(k)* грешка једначине која потиче услед контаминације излаза *y(k)* са шумом и због присутне грешке у процени вредности параметара. На основу претходне једначине могуће је предвидети вредност која ће се добити мерењем излаза процеса у тренутку одабирања k. Означавајући ту једнокорачну предикцију од *y(k)* са $\hat{y}(k|k-1)$, имаће се:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1)&=-\hat{a}_1(k-1)\,y(k-1)-\dots-\hat{a}_m(k-1)\,y(k-m)\\ &+\hat{b}_1(k-1)\,u(k-d-1)+\dots+\hat{b}_m(k-1)\,u(k-d-m)=\underline{\varphi}^T(k)\underline{\hat{\theta}}(k-1), \end{aligned} \tag{7.12}$$

где је $\underline{\varphi}^T(k)$ вектор чије координате сачињавају по m измерених вредности излаза и улаза до тренутка одабирања *k-1,*

$$\underline{\varphi}^T(k) = \left[-\,y(k-1) \quad \ldots -y(k-m) \quad u(k-d-1) \quad \ldots \quad u(k-d-m)\right] , \tag{7.13}$$

док је $\underline{\hat{\theta}}(k-1)$ вектор параметара процеса:

$$\underline{\hat{\theta}}(k) = \left[\hat{a}_1(k)\,\hat{a}_2(k)\ldots\hat{a}_m(k)\;\;\hat{b}_1(k)\,\hat{b}_2(k)\ldots\hat{b}_m(k)\right] . \tag{3.14}$$

Грешка предвиђања вредности излаза у тренутку k се сада одређује као разлика стварне, измерене вредности и једнокорачног предвиђања те вредности:

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) = y(k) - \underline{\varphi}^T(k)\underline{\hat{\theta}}(k-1) . \tag{7.15}$$

У претходном излагању се претпоставља да су мерења улаза и излаза извршена у $m+d$ тренутака одабирања , који претходе посматраном тренутку k. Уколико су мерења улаза и излаза измерена за $k=1,2,\ldots,m+d+N$ тренутака одабирања, тада се $N+1$ једначина облика

$$y(k) = \underline{\varphi}^T(k)\underline{\hat{\theta}}(k-1) + e(k), \tag{7.16}$$

може представити у виду једне векторске једначине

$$\underline{y}(m+d+N) = \underline{\psi}(m+d+N)\underline{\hat{\theta}}(m+d+N-1) + \underline{e}(m+d+N), \tag{7.17}$$

где су:

$$\underline{y}^T(m+d+N) = \left[\; y(m+d)\; y(m+d+1)\; y(m+d+2) \quad \ldots \quad y(m+d+N)\right] , \tag{7.18}$$

$$\underline{e}^T(m+d+N) = \left[\; e(m+d)\; e(m+d+1)\; e(m+d+2) \quad \ldots \quad e(m+d+N)\right] , \tag{7.19}$$

$$\underline{\psi}(m+d+N) =$$

$$= \begin{bmatrix} -y(m+d-1) & -y(m+d-2) & \ldots -y(d) & u(m-1) & u(m-2) & \ldots & u(0) \\ -y(m+d) & -y(m+d-1) & \ldots -y(d+1) & u(m) & u(m-1) & \ldots & u(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ -y(m+d+N-1) & -y(m+d+N-2) & \ldots -y(d+N) & u(m+N-1) & u(m+N-2) & \ldots & u(N) \end{bmatrix} . \tag{7.20}$$

Метода најмањих квадрата се заснива на критеријуму по коме је процена параметара оптимална ако је сума квадрата грешака у процењивању мереног излаза минимална. Дакле, процена параметара $\underline{\theta} = \underline{\hat{\theta}}$ биће оптимална када је показатељ квалитета процене, који је дат једначином (7.21), минималан,

$$J(\underline{\theta}) = \underline{e}^T(m+d+N)\,\underline{e}(m+d+N) = \sum_{k=m+d}^{m+d+N} e^2(k) , \tag{7.21}$$

где се вектор грешке процене израчунава на основу једначине (7.17), као:

$$\underline{e}(m+d+N) = \underline{y}(m+d+N) - \underline{\psi}(m+d+N)\underline{\hat{\theta}}(m+d+N-1) . \tag{7.22}$$

Може се показати да ће показатељ квалитета процене бити минималан ако је $N \geq 2m$ и ако процена параметара $\underline{\hat{\theta}}$ задовољава релацију :

$$\underline{\psi}^T\,\underline{\psi}\,\underline{\hat{\theta}} = \underline{\psi}^T\,\underline{y} . \tag{7.23}$$

Наиме, после смене израза (7.22) у једначину (7.21), показатељ квалитета процене узима облик дат једначином (7.24):

$$J(\underline{\theta}) = \underline{y}^T \underline{y} - \underline{y}^T \underline{\psi}\underline{\theta} - \underline{\theta}^T \underline{\psi}^T \underline{y} + \underline{\theta}^T \underline{\psi}^T \underline{\psi}\underline{\theta} \ . \tag{7.24}$$

Пошто је $\underline{\psi}^T \underline{\psi}$ увек нека семипозитивно дефинитна матрица, претходна једначина ће имати минимум ако је $\underline{\theta}$ једнако процени $\hat{\underline{\theta}}$ која задовољава релацију (7.23) јер ће тада последња два члана у једначини (7.22) да се међусобно пониште. Отуда се оптимална процена параметара добија користећи се релацијом (7.23) као

$$\hat{\underline{\theta}}(m+d+N-1) = \underline{P}(m+d+N)\,\underline{\psi}^T(m+d+N)\,\underline{y}(m+d+N) \ , \tag{7.25}$$

где је $\underline{P}(m+d+N)$ матрица која се дефинише на следећи начин:

$$\underline{P}(m+d+N) = \left[\underline{\psi}^T(m+d+N)\,\underline{\psi}(m+d+N)\right]^{-1} \ . \tag{7.26}$$

Приказани поступак оптималне процене параметара, добијен минимизацијом квадрата грешке једначине је нерекурзиван, тј. дати поступак се може применити тек када се изврше сва мерења улаза и излаза и добијени резултати мерења запамте у виду матрице (7.20). Примена методе најмањих квадрата у естимацији параметара стабилних процеса описаних дискретним моделом у виду диференцне једначине линеарне по параметрима, подразумева задовољавање следећих услова:

А. Потребно је да ред m и мртво време d процеса буду познати.

Б. Улазни сигнал $u(kT) = U(kT) - U_0$ мора бити прецизно измерен и U_0 мора бити познато.

В. Улазни сигнал $u(kT)$ мора бити присутан на улазу процеса бар у току m периода одабирања.

Г. Излазни сигнал $y(kT) = Y(kT) - Y_0$ такође мора бити прецизно измерен, Y_0 мора бити познато и мора да задовољава релацију $Y_0 = K \cdot U_0$ где је K статичко појачање процеса.

Д. Грешка процене мора бити некорелисана са елементима вектора $\underline{\psi}^T$ и $E\{e(k)\} = 0$.

На крају напоменимо још да постоји и рекурзивна варијанта овога алгоритма која је од нарочите важности у синтези адаптивних дигиталних система аутоматског управљања [45], [57].

7.1.3 Употреба MATLAB® 6.0 програмског окружења у идентификацији система

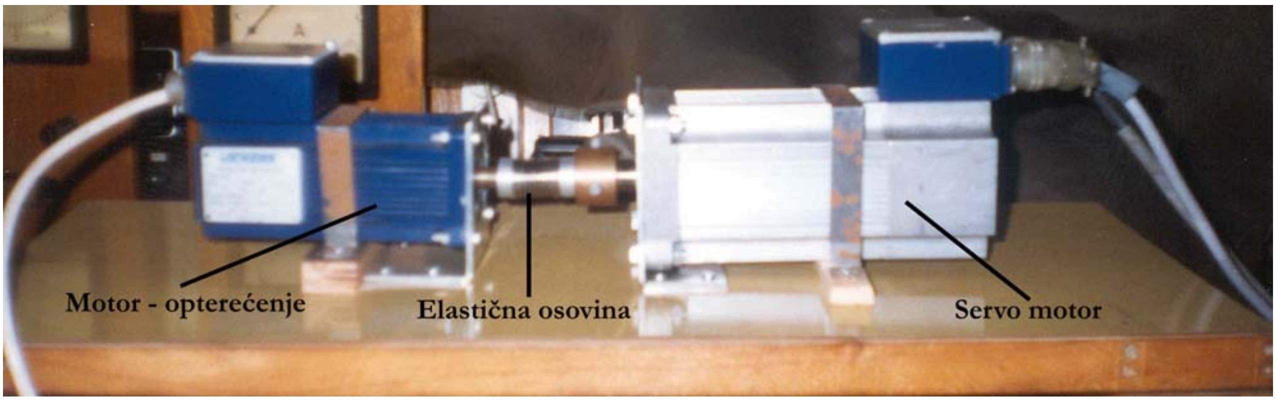
У оквиру **MATLAB® 6.0** програмског окружења постоји више скупова функција које обрађују одређену класу проблема, који се називају toolbox-овима [58]. Тако, постоји и скуп функција које се користе у овиру процеса идентификације система, тзв. ***System Identification Toolbox*** [59]**.** System Identification Toolbox нуди више различитих функција за сваки од наведених корака у процесу идентификације система, а који су описани у одељку **7.1.1.**. За **корак 2** у оквиру овог скупа функција су понуђене рутине које омогућавају графички приказ снимљених - добијених података у оквиру експеримента, функције које омогућавају филтрирање подака уклањање трендова и средње вредности из података. Такође су понуђене функције које омогућавају реконструкцију недостајућих података, као и ресемпловање података. За рад у оквиру **корака 3** понуђен је велики број непараметарских модела, као и најчешће употребљаван приступ "црне кутије" и структуре у простору стања, као и генералних линеарних модела у дискретном домену.

За **корак 4** понуђен је велики број метода за израчунавање модела тј. идентификационих метода. Стога су понуђени, како методи генералне предикције (maximal likelihood) и методи инструменталних варијабли за параметарске моделе, тако и базична корелациона и спектрална анализа за непараметарске моделе. Да би се модели испитивали у **кораку 5** многе функције подржавају рачунање и презентацију полова и нула, фреквентних карактеристика, као и симулацију и предикцију модела. У оквиру овог toolbox-а су укључене и функције које омогућавају трансформацију између дискретног и и континуалног модела и трансформацију у формате записа који се користе у другим toolbox-овима као што су ***Control System Toolbox*** [60] и ***Signal Processing Toolbox*** [61].

7.2 Опис лабораторијског серво-погона са еластично спрегнутом осовином

У оквиру Лабораторије за микропроцесорско управљање електромоторним погонима на Електротехничком факултету у Београду, постоји лабораторијски setup серво погона вискоих перформанси са еластично спрегнутом осовином. Овај лабораторијски setup се састоји из следећих елемената:

- Два синхрона мотора са перманентним магнетом (**DC brushless** мотор) производње италијанског **"Vickers"-а** (садашњи **"MOOG"**), који су спојени еластичном осовином, као што је приказано сликом 7.2. Један од ових мотора се користи као серво-мотор којим се управља, док се други користи у сврхе оптерећења;
- Дигиталног троосног серворегулатора ***DBM03*** производње италијанског **"Vickers"-а** (садашњи **"MOOG"**) који погони серво моторе, и
- Персоналног **PC** рачунара који је повезан преко RS232/RS485 комуникације са ***DBM03*** серворегулатором, на коме је инсталирана апликација која омогућава комуникацију са серворегулатором.



Слика 7.2 Фотографија лабораторијске групе серво мотор – мотор-оптерећење која је спрегнута са еластичном осовином

Дигитални серворегулатор ***DBM03*** производње италијанског **"Vickers"-а** (садашњи **"MOOG"**) је приказан на слици 7.3. и сврстава се у групу високо перформантних енергетских претварача – инвертора са дигиталним регулатором. Своју примену ***DBM03*** серворегулатор налази у регулацији и погону синхроних мотора са перманентним магнетом тзв. ***DC brushless*** мотора. Његова структура је заснована на дигиталном сигналном микропорцесору (***DSP***) и има могућност истовременог погона и контроле три мотора, односно три осе. По свакој оси је реализовано управљање на бази алгоритма индиректне векторске контроле (***IFOC***), при чему је минимална периода одабирња свега **0.0003s** (**300 μs)**. Стога налази примену у најзахтевнијим вишеосним апликацијама где је потребно прецизно управљање по брзини, као што су роботски механизми, тачкасто заваривање, паковање, алатне машине итд.

*Слика 7.3 Фотографија дигиталног троосног серворегулатора **DBM03** који се користи у лабораториском setup-у*

Неке од главних одлика серворегулатора ***DBM03*** су:

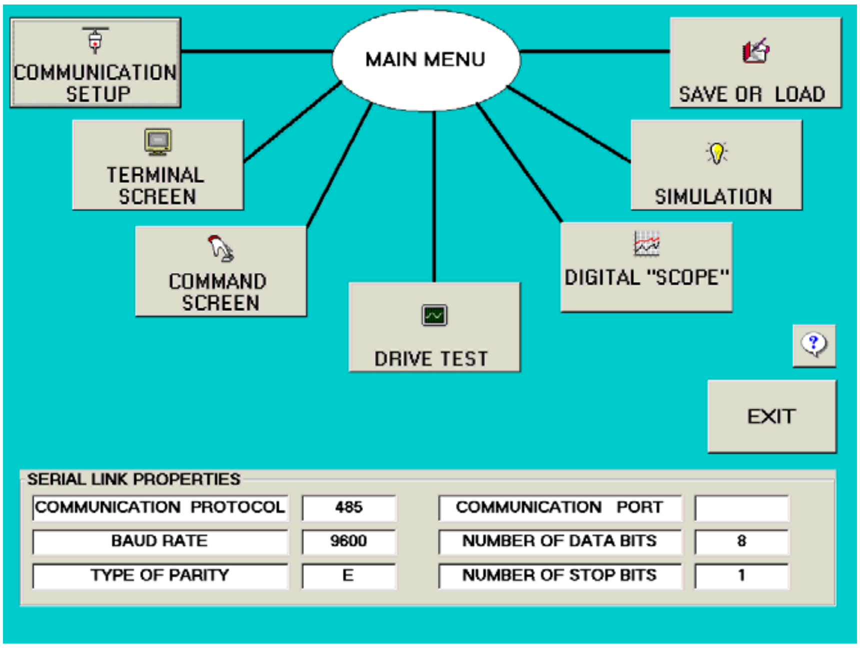
- дигитална брзинска петља;
- синусоидалан облик струје;
- прекидачка учестаност транзистора у инвертору је 10 kHz;
- инвертор је сачињен од IGBT транзистора;
- могу се програмирати појачања у регулаторима струје и брзине;
- имплементирана температурна заштита, пренапонска и поднапонска заштита, прекострујна заштита, заштита од прекида сигнала са резолвера, заштита од кратког споја у излазном колу, и
- RS232/RS485 комуникација са PC рачунаром.

Серворегулатор ***DBM03*** је преко комуникације протоколом RS232/RS485 повезан са лабораторијским PC рачунаром на коме је инсталирана рачунарска апликација **"DBM"** која ради у **Windows** окружењу и омогућује комплетно управљање и подешавање параметара серворегулатора као и графички приказ, кроз више графичких екрана:

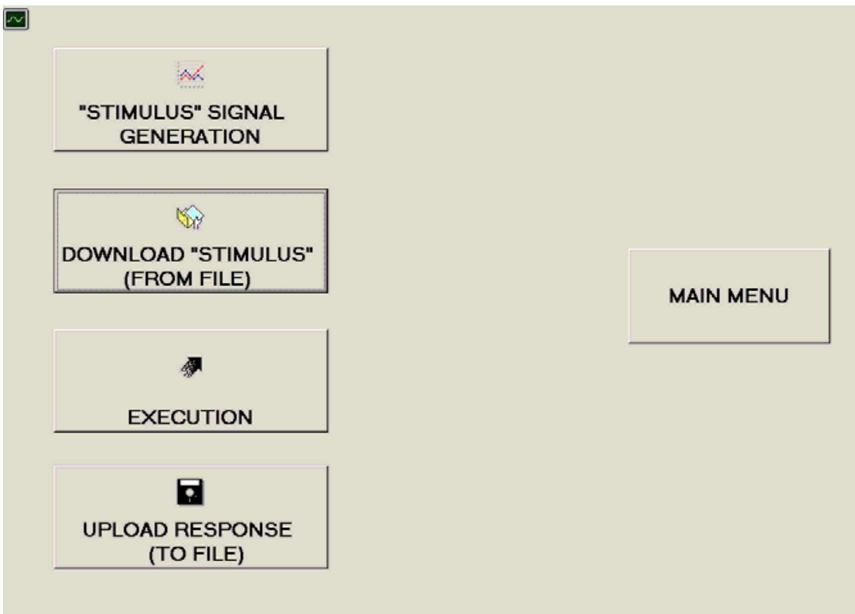
- подешавање параметара комуникације – ***communication setup***;
- комуникацију и задавање команди погону и линијском – терминалском моду – ***terminal screen***;
- задавање специфичних параметара и команди, као и ишчитавање постојећих параметара погона у оквиру форме са пољима за унос текста (тзв. text box-овима) – ***command screen***;

- могућност генерисања референце брзине, уношења референце момента или референце брзине која је унапред припремљена (download), њено извршавање и прикупљање одзива (upload) – ***drive test***;
- графички приказ референце и одзива брзине – **digital “scope”**, и
- снимање или уношење свих подесивих параметара – **save or load**.

На слици 7.4. приказан је почетни екран – ***main menu*** преко којег се долази до горе описаних опција.



Слика 7.4 Изглед главног екрана – main menu Windows апликације ***“DBM”***



Слика 7.5 Изглед екрана – drive test Windows апликације ***“DBM”***

За процес идентификације лабораторијског setup-а коришћена је могућност уношења референце момента из унапред припремљеног фајла који садржи максимално 4096 (2^{12}) тачака, потом је унети "stimulus" извршаван и одзив позиције вратила мотора је потом запамћен у оквиру фајла. Екран са кога је то омогућено у апликацији је приказан на слици 7.5.

7.3 Процес и резултати идентификације модела лабораторијског серво погона са еластично спрегнутим масама

Као што је већ речено, процес идентификације подразумева кружни циклус при чему се врши селектовање структуре модела, прорачун најбољег модела у структури и евалуација одлика тог модела. У оквиру овог одељка, у складу са корацима који су дати у одељку 7.1. биће приказан процес идентификације модела лабораторијског серво погона са еластично спрегнутим масама који је описан у претходном одељку.

7.3.1 Осмишљавање улазне секвенце и мерење одзива (корак 1)

Имајући у виду разматрања која су учињена у поглављу **5**, као улазни сигнал система који је потребно идентификовати се узима излаз из дигиталног регулатора – сигнал команде електромагнетног момента (сигнал на улазу у D/A конвертор), док се као излазни сигнал узима сигнал позиције осовине серво-мотора (сигнал на излазу из A/D конвертора). Почетни корак у идентификацији система подразумева одговарајући начин узорковања одбирака улаза – сигнала команде електромагнетног момента, и излаза – сигнала позиције осовине серво-мотора, чији ће резултат бити адекватан сет података који обезбеђује добијање исправних и веродостојних резултата након примене идентификационих метода. Стога је потребно при генерисању одбирака улазног сигнала $u(kT)$ испоштовати захтеве *Б*, *В* и *Д* који су наведени у одељку **7.1.2.**:

Б. Улазни сигнал $u(kT) = U(kT) - U_0$ мора бити прецизно измерен и U_0 мора бити познато.

В. Улазни сигнал $u(kT)$ мора бити присутан на улазу процеса бар у току m периода одабирања, где је m ред процеса.

Д. Грешка процене мора бити некорелисана са елементима вектора $\underline{\psi}^T$ и $E\{e(k)\} = 0$.

Наведени захеви се могу у потпуности задовољити, уколико се на улаз доведе сигнал у облику псеудослучајне бинарне секвенце (краће ПРБС од енглеске речи **pseudorandom binary sequence**). Псеудослучајна бинарна секвенца (у даљем тексту ПРБС), представља сигнал чија је вредност у неком тренутку статистички независна од вредности у претходним тренуцима, стим што је амплитуда сигнала увек тачно одређена и може узимати две дискретне вредности. Стога је ПРБС сличан дискретном белом шуму чије се статистичке особине могу описати очекивањем (средњом вредношћу) и коваријансом као што је дато једначином (7.4). Овако генерисан улазни сигнал даће информације о свим учестаностима до Никвистове учестаности у оквиру једног експеримента.

Имајући претходно у виду, потребно је дефинисати амплитуду сигнала ПРБС и опсег учестаности од интереса за систем који се идентификује, односно најкраће трајање импулса у ПРБС. Осим тога потребно је обезбедити статистичке особине генерисаног сигнала. Стога је извршен велики број експеримената варирањем горе наведених параметара и на основу резултата су изабрани следећи критеријуми за генерисање ПРБС:

1. **Амплитуда тестирајућег сигнала на улазу** – Код серворегулатора ***DBM03*** команда електромагнетног момента је ограничена на дигиталну вредност 2^{16} што одговара вредности двоструког номиналног момента. Експериментисањем са различитим вредностима за амплитуду команде момента, утврђено је да се са амплитудом команде момента у дигиталној вредности 2^9 избегава утицај нелинеарности на добијене резултате за учестаности које су од интереса.

2. **Најкраће трајање једне секвенце команде момента** – Перода одабирања серворегулатора ***DBM03*** је $T_s = 0.0003\ s$. Са друге стране, циљ идентификације овог система је одређивање функције преноса лабораторијског setup-а да би се на основу њеног познавања пројектовао дигитални полиномијални регулатор брзине. Имајући у виду искуствену релацију која је наведена у одељку **3.9.2.** гранична учестаност пропусног опсега система је:

$$f_0 \approx \frac{1}{4 \cdot T_s} \approx 800\ Hz\,. \tag{7.27}$$

   За пропусни опсег петље регулације брзине, као максимална вредност учестаности која је од интереса, је усвојена вредност од **200 Hz**. Стога је најкраће трајање импулса у ПРБС секвенци ограничено на вредност која је два пута већа од наведене, односно узето је да је минимална вредност трајања импулса момента:

$$T_{\min} = 8 \cdot T_s = 8 \cdot 0{,}0003\, s = 0{,}0024 s\ . \tag{7.28}$$

3. **Обезбеђивање статистичких особина генерисане псеудослучајне секвенце** – Да би се обезбедиле одговарајуће статистичке особине тестирајућег сигнала на улазу система, генерисање ПРБС сигнала је извршено коришћењем **MATLAB®**-ове функције ***randn*** [58] која генерише низ случајних бројева нормалне расподеле, нулте средње вредности и јединичне варијансе, коваријансе и стандардног одступања:

$$\begin{aligned} &\bar{v} = E\{v(kT)\} = 0\,, \\ &\sigma_v = \sigma_v^2 = 1, \\ &\operatorname{cov}[v(kT),\tau] = E\{v(kT) \quad v(kT+\tau)\} = \sigma_v^2 \cdot \delta(\tau) = 1\,. \end{aligned} \tag{7.29}$$

   Овако генерисане вредности су потом свођене на две дискретне вредности тако што су сви бројеви у низу чије су вредности биле веће или једнаке нули проглашене за позитивну команду момента вредности M_{test} (у овом случају дигиталне вредности 2^9), док су сви бројеви у низу чије су вредности биле мање од нуле проглашене за негативну команду момента вредности $-M_{test}$ (у овом случају дигиталне вредности другог комплемента 2^9). Услов (7.29) важи и за овако модификоване вредности, што се може проверити израчунавањем свих наведених параметара за добијени низ који чини ПРБС секвенцу.

На основу претходних закључака изнетих у тачкама 1., 2. и 3. генерисање псеудослучајне бинарне секвенце команде електромагнетног момента је програмски решено у оквиру **MATLAB®**-овог ***m*** – фајла (датог на дискети у прилогу рада), на следећи начин:

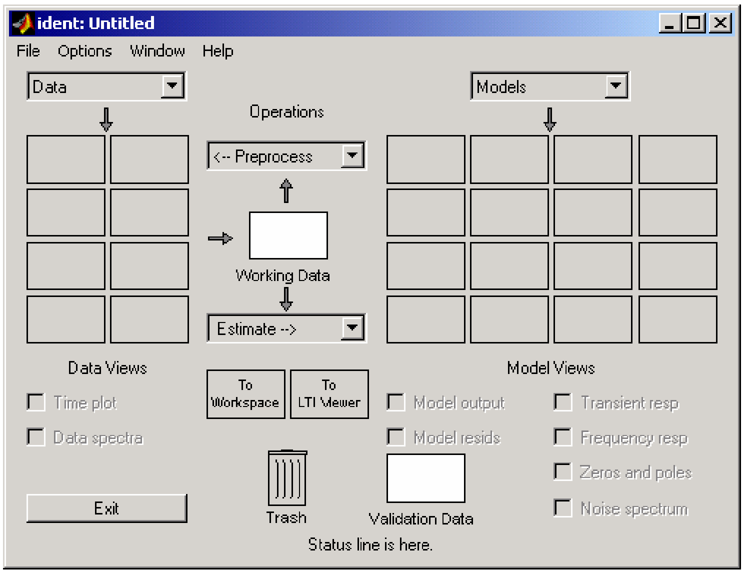
```
...
randn('state',sum(100*clock));     % Podešava se stanje generatora slučajnih brojeva

for i=1:7:4088,
        z=randn;
        for j=1:1:7,
                if z>=0
                        x=512;
                        y=512;
                else
                        x=65024;
                        y=-512;
                end
                B(i+j)=x;
                N(i+j)=y;
        end
end
fid = fopen('no1-8-9-bin.txt','wt')
fprintf(fid,'%5i\n',B);
fclose(fid);
...
```

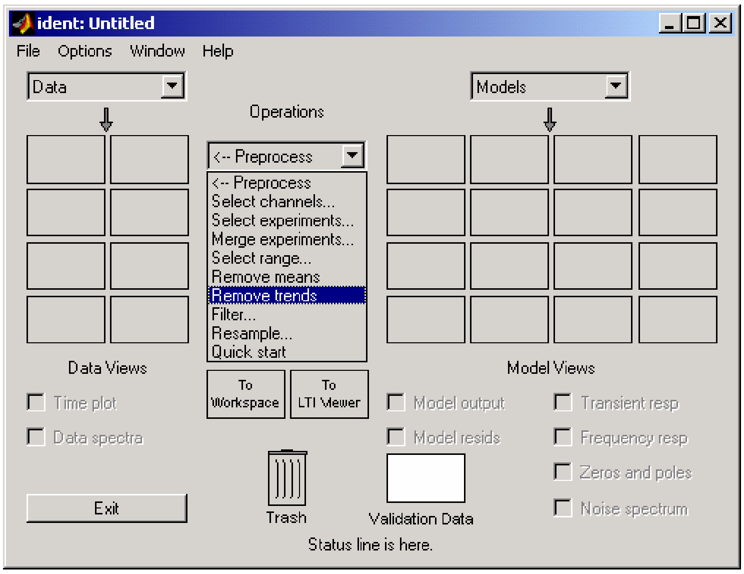
Овако припремљени ***m*** – фајл је извршаван у **MATLAB®** програмском окружењу више пута, како би се обезбедила серија од више независних експеримената. Потом су припремљени фајлови пребачени у **PC** рачунар лабораторијског setup-а на коме је инсталирана рачунарска апликација **"DBM"** за комуникацију ***DBM03*** серворегулатором. Потом је кроз екран **"*drive test*"** сукцесивним извршавањем команди **"*download stimulus (from file)*"**, **"*execute*"**, **"*upload response (to file)*"** (види слику 7.5), извршено уношење припремљених референци момента, њихово извршавање и прикупљање одзива позиције вратила мотора уписивањем у виду фајла одзива. На овај начи је извршено више независних експеримената и извршено сакупљање података који ће се користити у даљем току процеса идентификације.

7.3.2 Испитивање и вршење обраде података који су добијени у експерименту (корак 2)

У оквиру **MATLAB®**-овог ***System Identification Toolbox*** налази се графички кориснички интерфејс који омогућава интеграцију различитих функција које се примењују за сваки од наведених корака у процесу идентификације система описаних у одељку **7.1.1.** Поменути графички кориснички интерфејс се стартује позивањем из **MATLAB®**-овог командног прозора командом **"*ident*",** тако да се по уношењу ове команде отвара прозор који је приказан на слици 7.6. Са леве стране прозора налази се падајући мени преко којег је омогућен увоз снимљених података улаза и излаза система из више експеримената. Над овим подацима је могуће извршити више операција које су дефинисане падајућим менијем "Preprocess" који се налази у средњем делу екрана, у секцији "Operations" (слика 7.7). Реч је о следећим функцијама: "Select channels..." која служи за одређивање улаза и излаза, "Select experiments..." и "Merge experiments...", која омогућује вршење операција над самим експериментима, "Select range" која омогућава одређивање дела експеримента који ће бити разматран, "Remove means" и "Remove trends" које служе за одстрањивање средње вредности и тренда у подацима, “Filter...” за примену дигиталног филтра над подацима и “Resample...” за промену учестаности одабирања, тзв. ресемпловање података.



Слика 7.6 Изглед прозора графичког корисничког интерфејса ***ident MATLAB***$^{®}$*-овог* ***System Identification Toolbox****-а*



Слика 7.7 Изглед прозора графичког корисничког интерфејса ***ident MATLAB***$^{®}$*-овог* ***System Identification Toolbox****-а*

У доњем левом углу испод области “Data Views” где се смештају подаци о експериментима, налазе се два chek box-а: “Time plot” и “Data spectra” који омогућавају увид у временски дијаграм улаза и излаза и приказ спектралне анализе сигнала – **периодограма**. Као што је познато, случајни сигнали у које можемо сврстати и сигнал улаза, односно излаза, немају коначну енергију, па према томе, не може се одредити Фуријеова трансформација дискретног случајног сигнала. Међутим такви сигнали имају коначну средњу снагу и за њих се може дефинисати **густина спектра снаге** [62]. Ако је $x(t)$ сигнал који представља континуални стационарни случајни процес, онда је његова аутокорелациона функција дефинисана са:

$$r_{xx}(\tau) = E\{x^*(t)x(t+\tau)\}, \tag{7.30}$$

а густина спектра снаге је Фуријеова трансформација аутокорелационе функције:

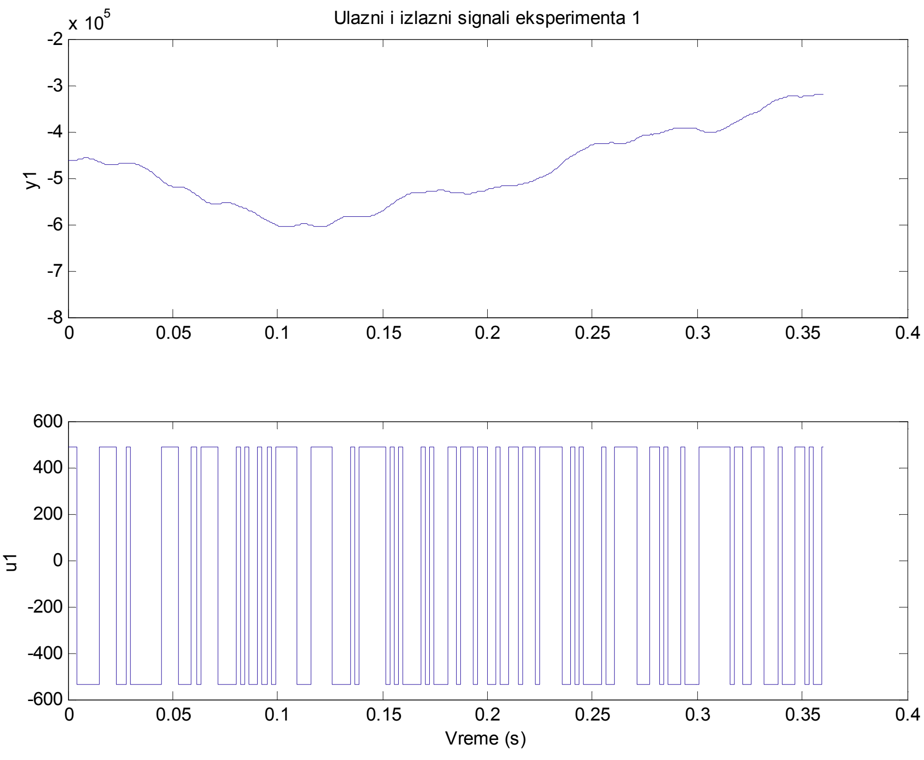
$$S_{xx}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau)e^{-j\Omega t}d\tau\,. \tag{7.31}$$

Нека је случајни сигнал $x(t)$ дискретизован тако да је задовољен услов који поставља теорема одабирања. У процесу дискретизације формира се коначна секвенца $x[n],\ 0 \le n \le N-1$. Израз који представља процену густине спектра снаге случајног сигнала, назива се **периодограм**, и дефинисан је на следећи начин:

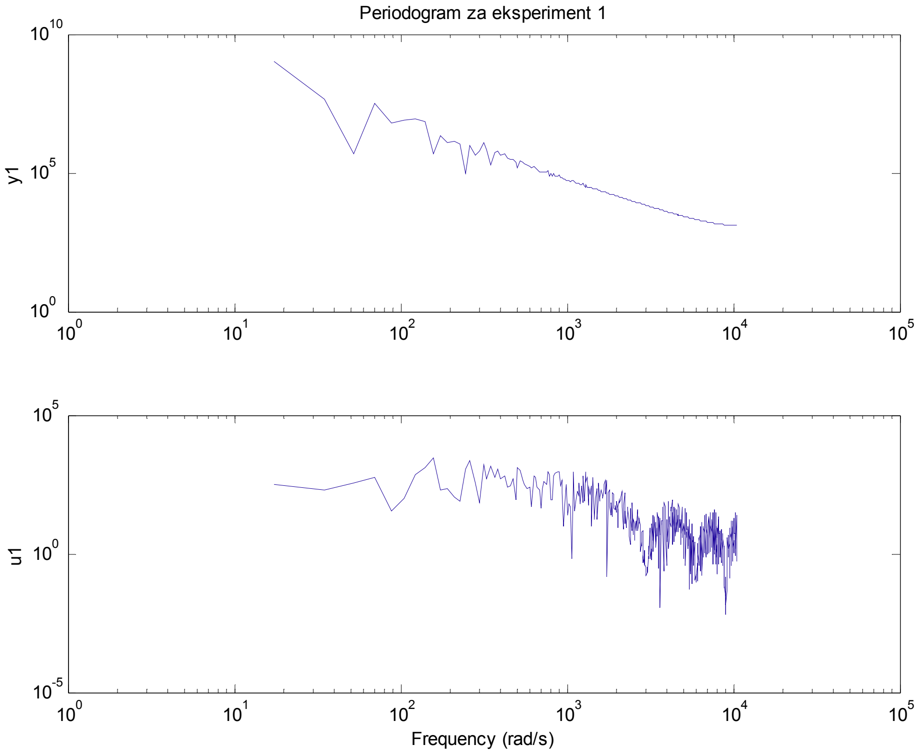
$$P''_{xx}(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}\right|^2 = \frac{1}{N}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2, \tag{7.32}$$

где је $X\left(e^{j\omega}\right)$ Фуријеова трансформација секвенце $x[n]$.

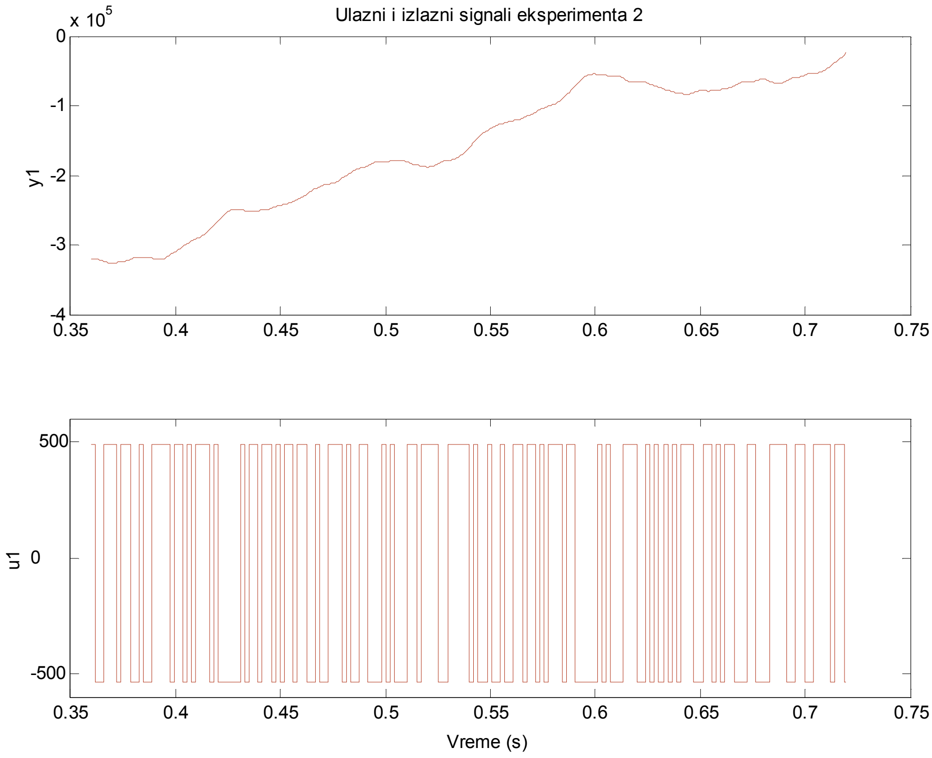
На основу претходно изнетог, извршен је увоз четири експеримента који су извршени како је то описано у претходном одељку. Потом је извршена обрада увежених експеримената најпре применом функције “Remove trends” чиме су одстрањене средње вредности из улазних и излазних података, за сваки од експеримента. Даље су коришћењем функције “Select range” одређени делови експеримента који ће бити служити као радни и валидациони подаци за сваки експеримент понаособ. Резултат ових обрада наведених експеримената је дат у облику временског дијаграма улаза и излаза и дијаграма спектралне анализе сигнала – периодограма на сликама 7.8, 7.9, 7.10 и 7.11.



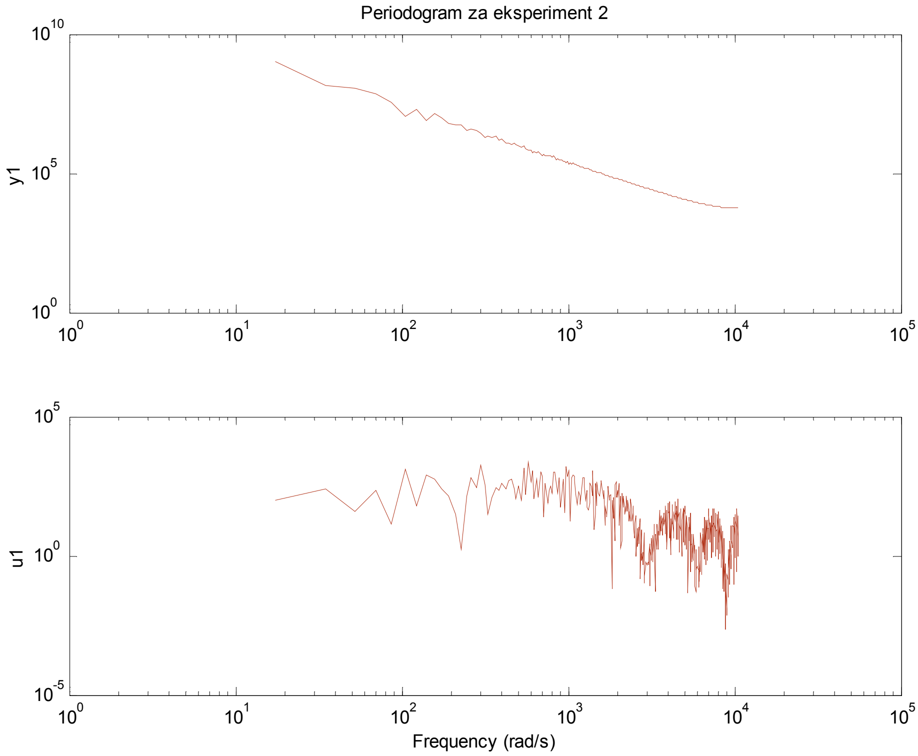
Слика 7.8а Временски дијаграм улазних и излазних сигнала обрађеног експеримента 1



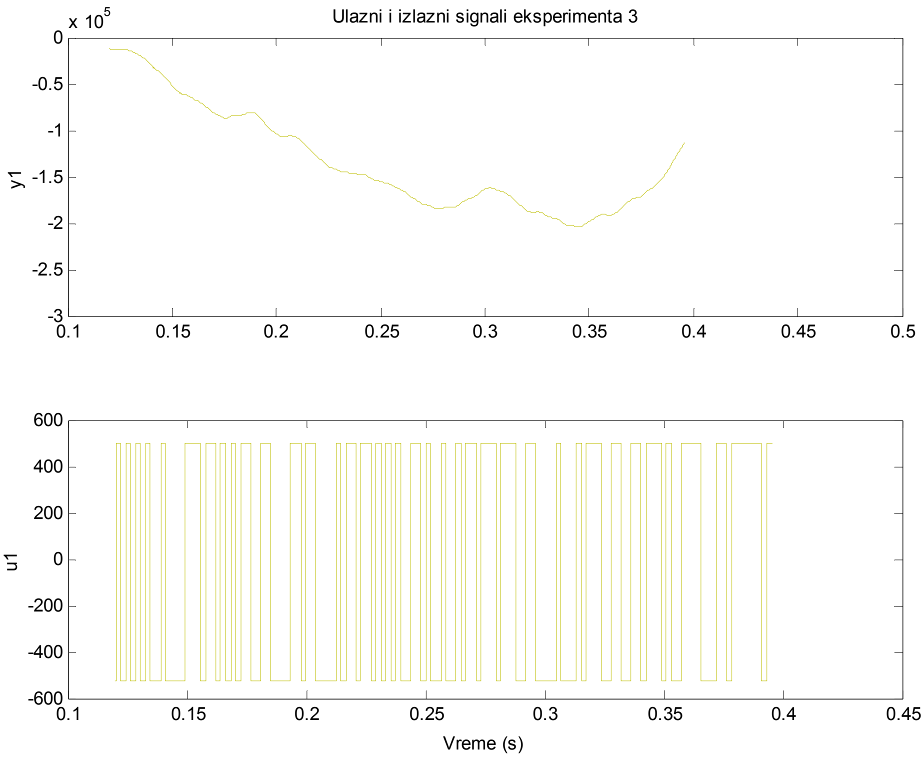
Слика 7.8б Периодограм улазних и излазних сигнала обрађеног експеримента 1



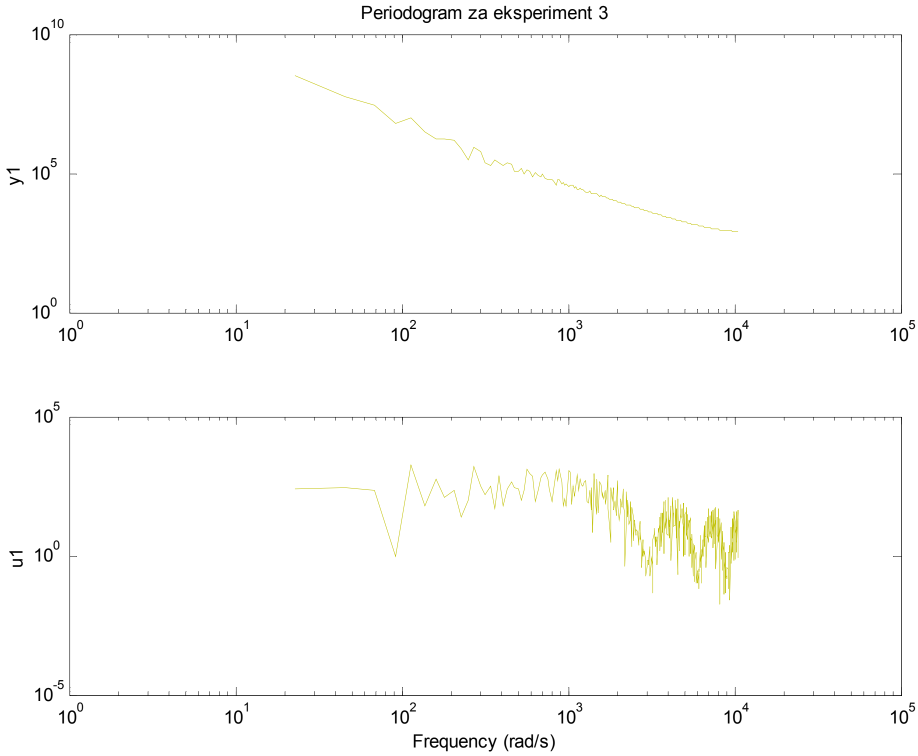
Слика 7.9а Временски дијаграм улазних и излазних сигнала обрађеног експеримента 2



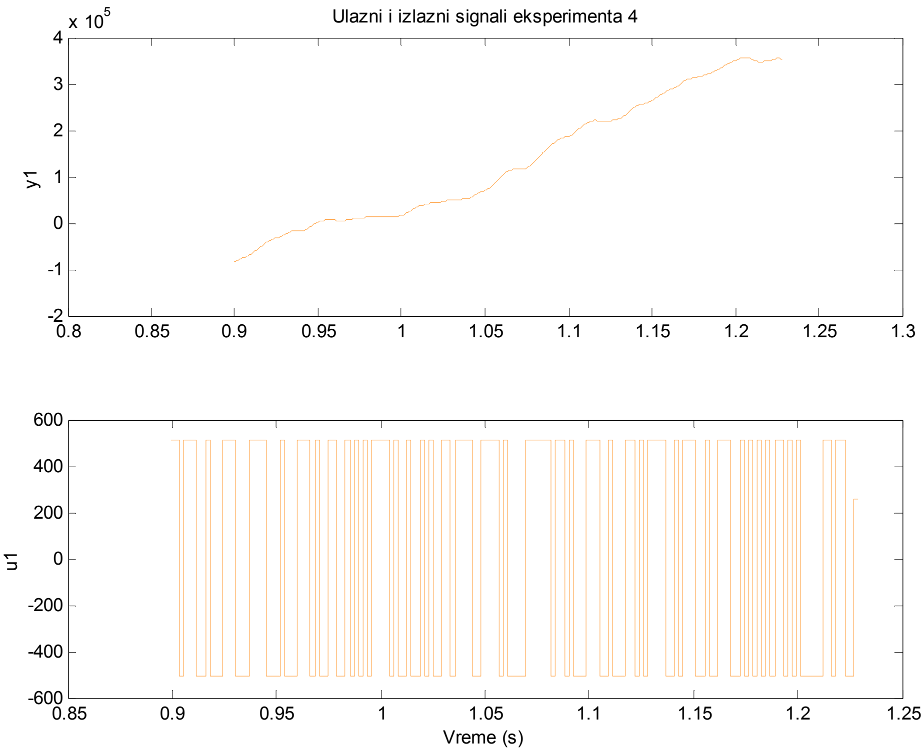
Слика 7.9б Периодограм улазних и излазних сигнала обрађеног експеримента 2



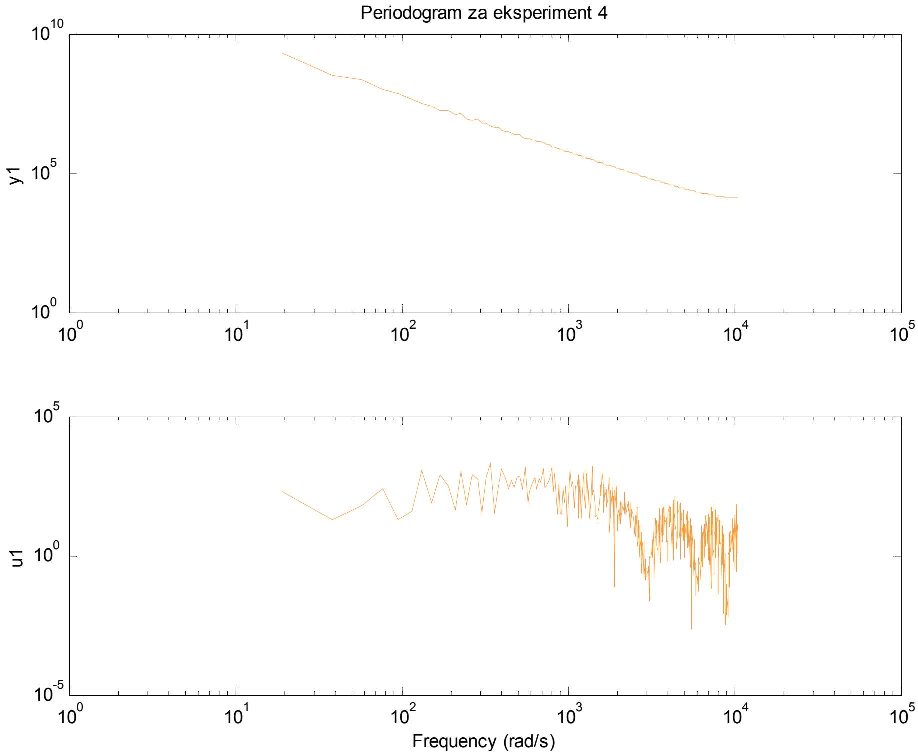
Слика 7.10а Временски дијаграм улазних и излазних сигнала обрађеног експеримента 3



Слика 7.10б Периодограм улазних и излазних сигнала обрађеног експеримента 3



Слика 7.11а Временски дијаграм улазних и излазних сигнала обрађеног експеримента 4



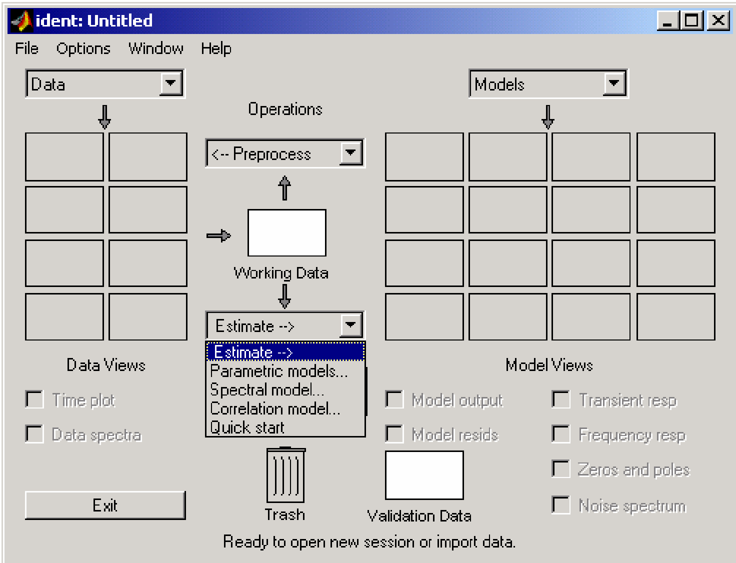
Слика 7.11б Периодограм улазних и излазних сигнала обрађеног експеримента 4

7.3.3 Дефинисање сета модела и израчунавање најбољег у структури модела (кораци 3 и 4)

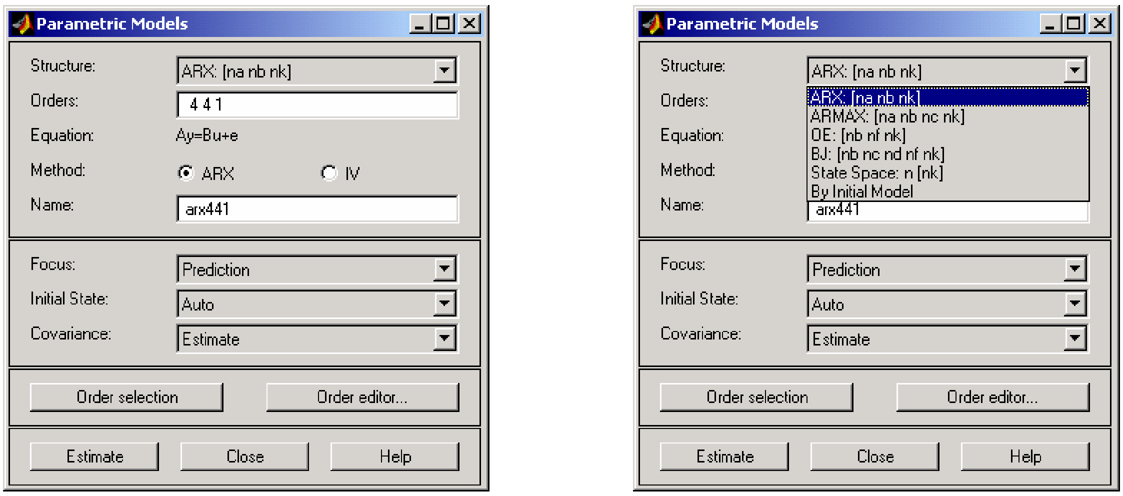
По завршеној обради података над којим ће се вршити идентификација система, потребно је извршити селектовање и дефиницију сета модела (сета кандидата описа система) у оквиру којих је потребно наћи модел и израчунавање најбољег модела у структури модела у сагласности са радним и валидационим подацима и датим идентификационим методом. У оквиру поменутог графичког корисничког интерфејса **MATLAB®**-овог ***System Identification Toolbox***-а, у секцији "Operations" која се налази у средњем делу екрана, налази се падајући мени "Estimate" (слика 7.12) који садржи функције које то омогућују. Реч је о следећим функцијама: "Parametric models..." која служи за за рад са идентификационим методама заснованих на параметарским моделима, и "Spectral model..." и "Correlation model..." које садрже идентификационе методе засноване на непараметарским моделима. Селектовањем функције "Parametric models..." отвара се прозор приказан сликом 7.13 који омогућава избор структуре модела: "ARX" модел (једначина 7.9), "ARMAX " модел (једначина 7.8), "OE" (Output-Error) модел (једначина 7.10), "BJ" (Box-Jenkins) модел (једначина 7.7), модел у простору стања и предефинисан модел од стране корисника. За све моделе је могуће унети ред система који се естимира, метод којим се врши естимација, као и почетно стање, фокус који ће служити за оцењивање модела и естимацију коваријансе. За "ARX" модел је омогућено и добијање избора реда модела кроз естимирање фамилије модела и одређивање избора користећи се AIC (Akaike Information Criterion) критеријумом [59].

У десном углу прозора графичког интерфејса **"*ident*"**, испод области "Model Views" где се смештају подаци о моделима, налазе се два chek box-а, "Model output" и "Model resids". Chek box "Model output" даје дијаграм излаза симулираног одзива идентификованог модела на улазни сет валидационих података и дијаграм стварног (измереног) излазног сета валидационих података, у сврхе упоређивања добијеног (симулираног) излаза са стварним (измереним) излазом. валидационих података и дијаграм симулираног излаза на улазне податке валидационих података. Chek box “Model resids” тестира ваљаност модела на основу увида у разлику између симулираног и стварног излаза тзв. “остатака” (“residuals”), који не смеју да буду у корелацији са излазом система приказивањем дијаграма аутокорелационе функције симулраног и стварног излаза и кроскорелационе функције симулираног излаза и стварног улаза.

Осим поменута два chek box-а, у десном углу прозора графичког интерфејса налазе се још четири chek box-ова који служе за вршење увид у неке од одлика модела: “Transient resp” даје дијаграм транзијентног одзива модела (одзив на степ побуду), “Frequency resp” који приказује фреквентни одзив модела (амплитудску и фазну фреквентну карактеристику), “Zeros and poles” који даје дијаграм нула и полова модела и “Noise spectrum” који даје периодограм симулираног излаза.



Слика 7.12 Изглед прозора графичког корисничког интерфејса ***ident MATLAB®****-овог* ***System Identification Toolbox****-а*



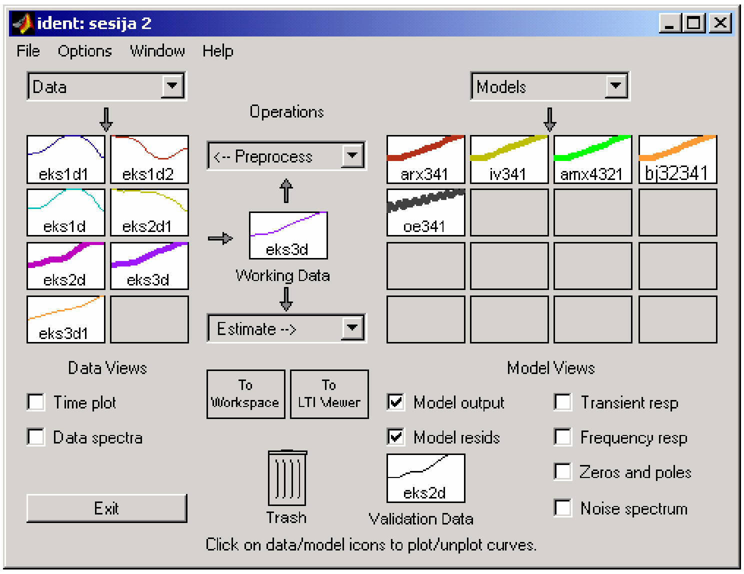
Слика 7.13 Изглед прозора који се добијају позивањем функције “Parametric models...” из “Estimate” надајућег менија

На основу претходно изнетог, над обрађена четири експеримента који су приказани на сликама 7.8, 7.9, 7.10 и 7.11. су формирани сетови модела за следеће структуре модела: “ARX” модел , “ARMAX ” модел , “OE” (Output-Error) модел и “BJ” (Box-Jenkins) модел. Сваки сет модела је садржао моделе чији су степени полинома $A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1})$ и $D(z^{-1})$, као и мртво време процеса d, варирани у интервалу од првог до петог степена. По испитивању карактеристика тако добијених сетова модела на основу увида у дијаграме излаза симулираног одзива идентификованог модела на улазни сет валидационих података и стварног (измереног) излазног сета валидационих података (“Model output”) утврђено је да се најбољи резултати у том смислу као и у смислу тзв. “остатака” (“residuals”), испитивањем дијаграма аутокорелационе функције и кроскорелационе функције, постижу за ред система који је трећег реда у бројиоцу, четвртог реда у имениоцу и за једно транспортно кашњење, односно:

$$\deg(B) = 3,\ \deg(A) = 4,\ \deg(D) = 2,\ \deg(C) = 3,\ d = 1. \tag{7.33}$$

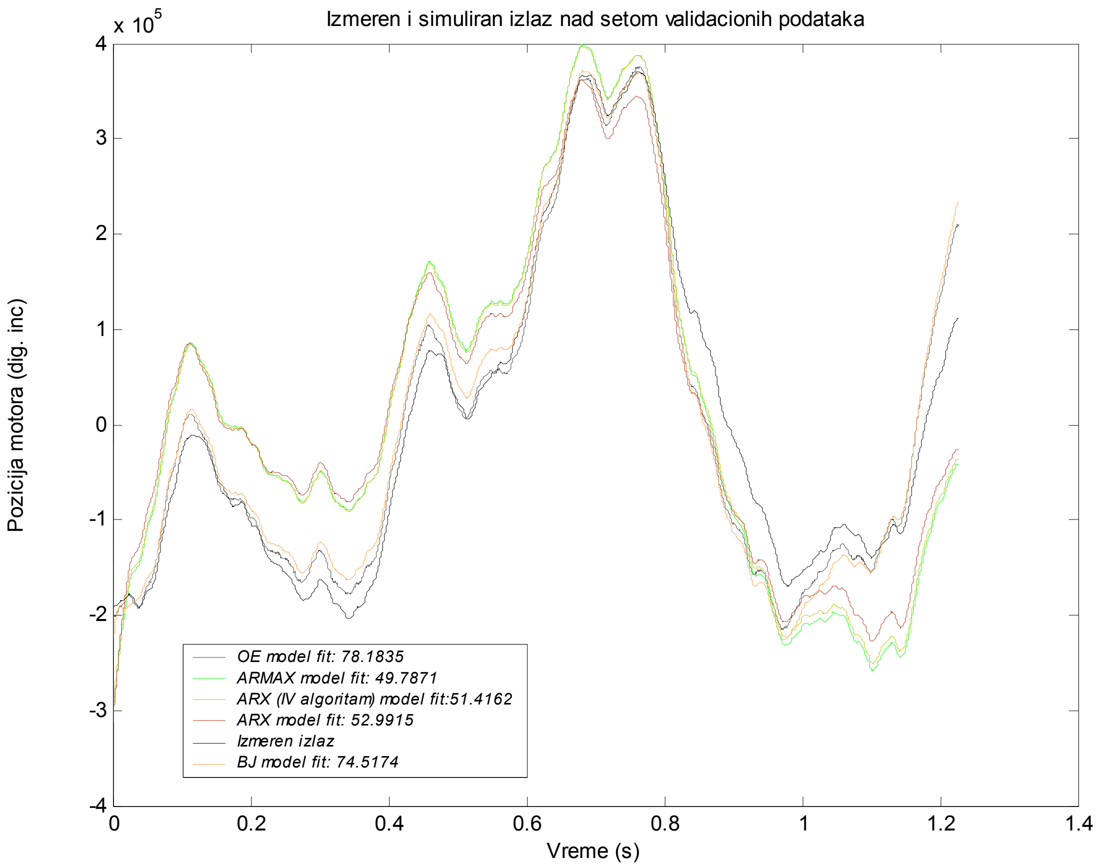
Потом је формиран сет модела од наведених структура модела за исти ред система(слика 7.14). На исти начин, као што је претходно описано, извршено је испитивање карактеристика разних структура модела у новоформираном сету модела, а за више комбинација радних и валидационих података. Основни критеријум је, као и у претходном случају, био увид у дијаграме излаза симулираног одзива идентификованог модела на улазни сет валидационих података и стварног (измереног) излазног сета валидационих података (“Model output”). За случај када су као радни подаци коришћени подаци из експеримента 3, а као валидациони, подаци из експеримента 2 на слици 7.15 су приказани дијаграми излаза симулираног одзива и стварног одзива, при чему је поклапање ових одзива за различите структуре модела било следеће:

- за “ARX” модел поклапање је 52,9915%,
- за “ARX” модел (методом инструменталних варијабли) поклапање је 51,4162%,
- за “ARMAX ” модел поклапање је 49,7871%,
- за **“OE”** (Output-Error) модел поклапање је **78,1835%** и
- за **“BJ”** (Box-Jenkins) модел поклапање је **74,5174%**.



Слика 7.14 Изглед прозора графичког корисничког интерфејса ***ident MATLAB***®*-овог* ***System Identification Toolbox****-а*

Како по критеријуму поклапања одзива, тако и по критеријуму тзв. "остатака" ("residuals") и за остале комбинације радних и валидационих података најбоље резултате су дале две класе модела: "OE" (Output-Error) модел и "BJ" (Box-Jenkins) модел, при чему је у већини случајева предњачио "OE" (Output-Error) модел.

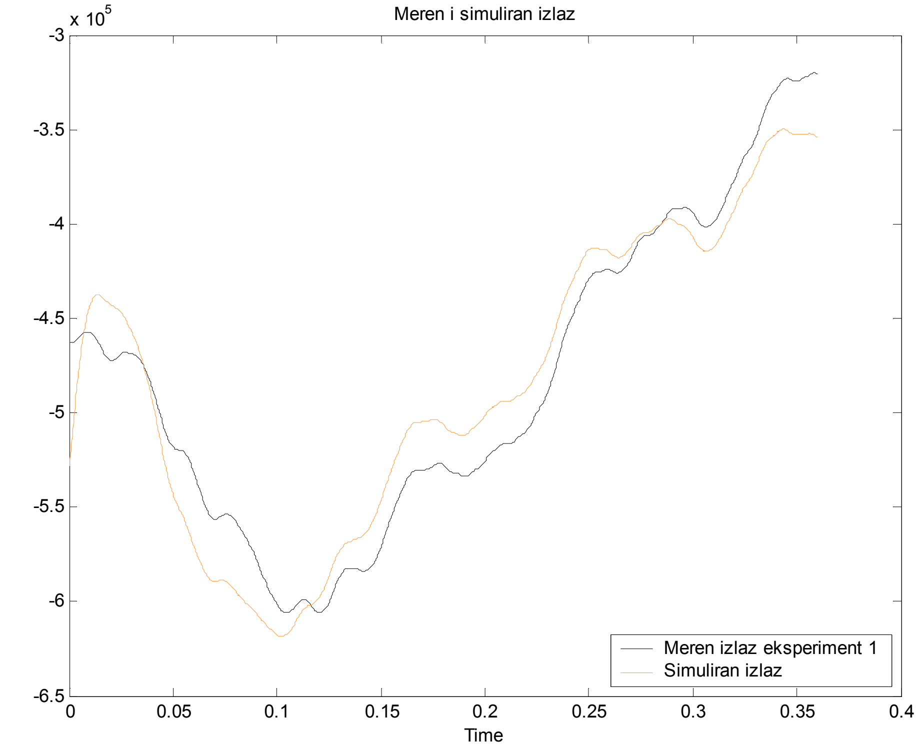


Слика 7.15 Изглед дијаграма излаза симулираног одзива и стварног одзива за једну од комбинација радних и валидационих података

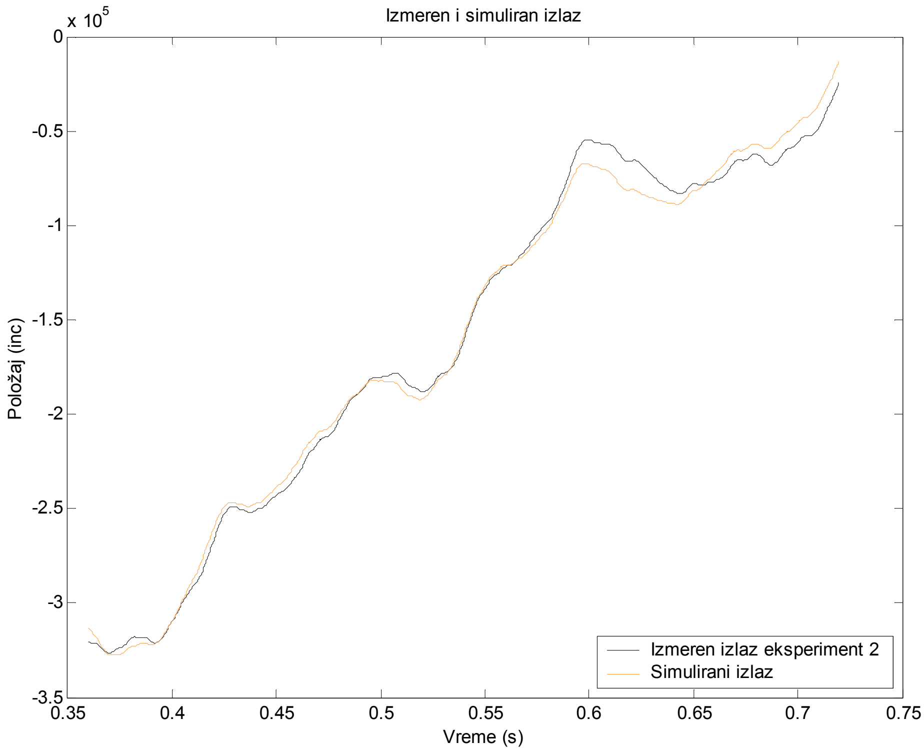
Сада је по истом принципу формиран сет исте структуре "OE" (Output-Error) модела који су добијени комбинацијом различитих радних и валидационих података. После сличног испитивања добијен је модел који је генерално дао највеће могуће поклапање излаза симулираног одзива идентификованог модела на улазни сет валидационих података и стварног (измереног) излазног сета валидационих података ("Model output") за сва четири експеримента:

- За експеримент 1 добијено је поклапање 68,4513%,
- За експеримент 2 добијено је поклапање 91,8832%,
- За експеримент 3 добијено је поклапање 89,9255% и
- За експеримент 4 добијено је поклапање 98,1873%.

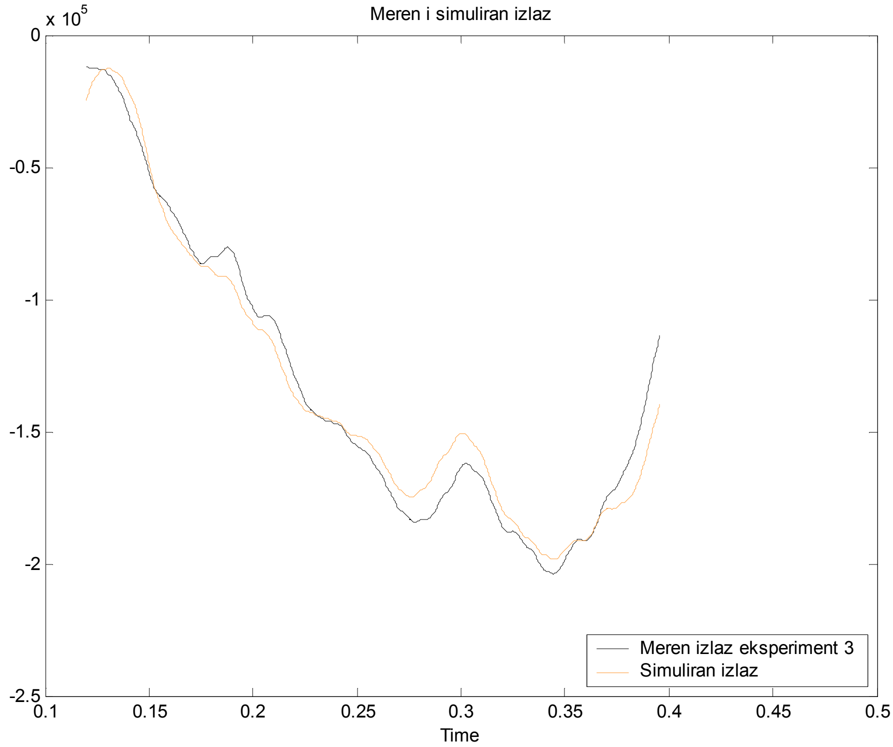
Дијаграми мереног и симулираног излаза су дати на следећим сликама 7.16, 7.17, 7.18 и 7.19:



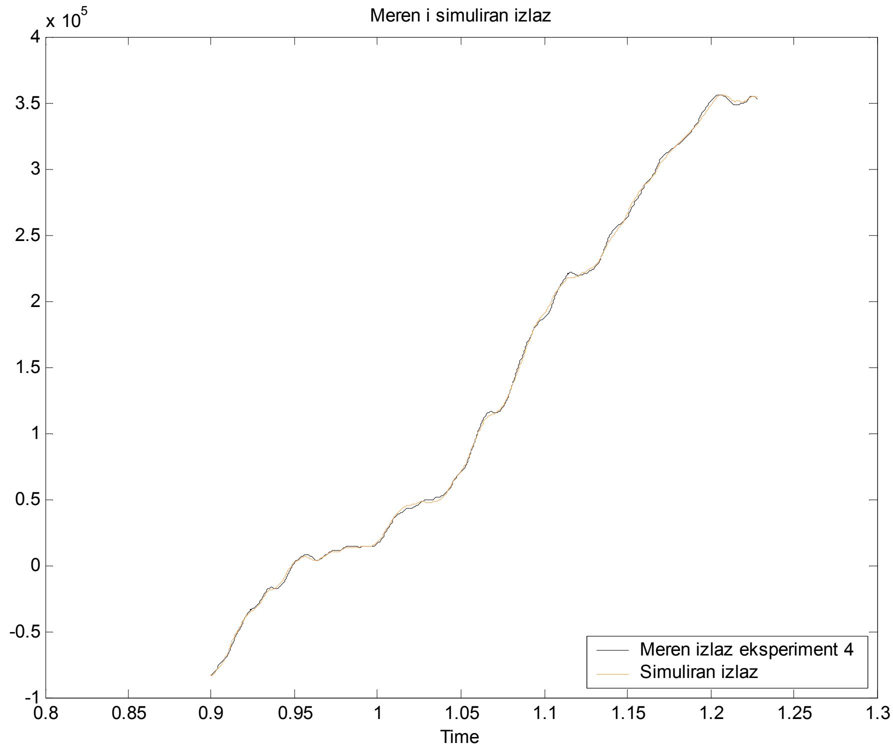
Слика 7.16 Изглед дијаграма излаза симулираног одзива и стварног одзива прозора радне податке експеримента 4 и валидационих података експеримента 1



Слика 7.17 Изглед дијаграма излаза симулираног одзива и стварног одзива прозора радне податке експеримента 4 и валидационих података експеримента 2



Слика 7.18 Изглед дијаграма излаза симулираног одзива и стварног одзива прозора радне податке експеримента 4 и валидационих података експеримента 3



Слика 7.19 Изглед дијаграма излаза симулираног одзива и стварног одзива прозора радне податке експеримента 4 и валидационих података експеримента 4

Идентификован модел је дат са следећом диференцном једначином:

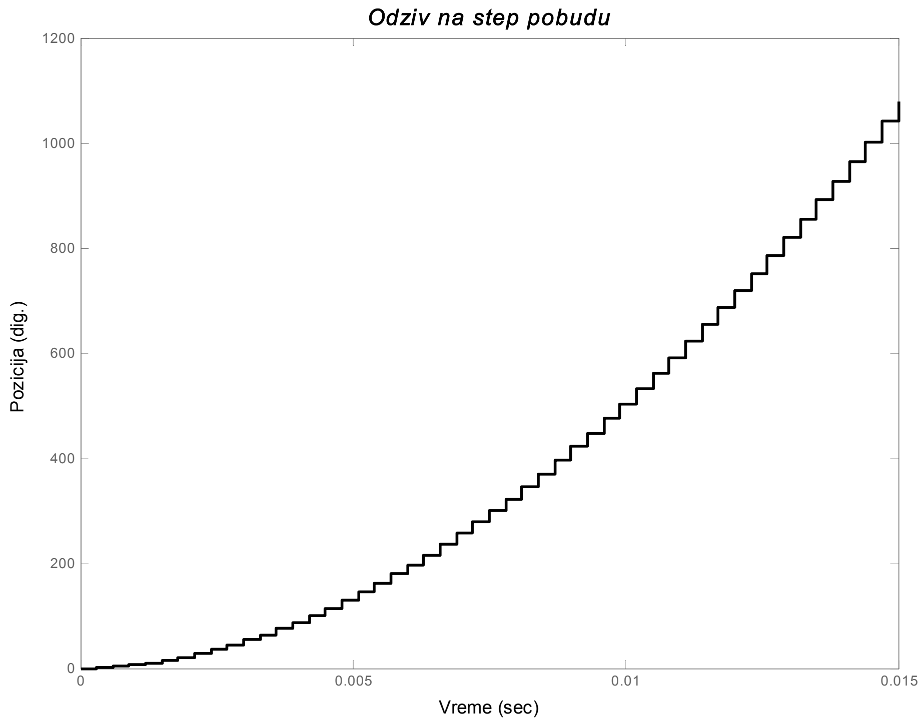
$$y(z)=\frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}\cdot u(z)+e(z)=\frac{z^{-1}-1.97z^{-2}+0.9701z^{-3}}{1-3.96z^{-1}+5.88z^{-2}-3.882z^{-3}+0.9605z^{-4}}+e(z), \qquad (7.34)$$

односно следећом функцијом преноса:

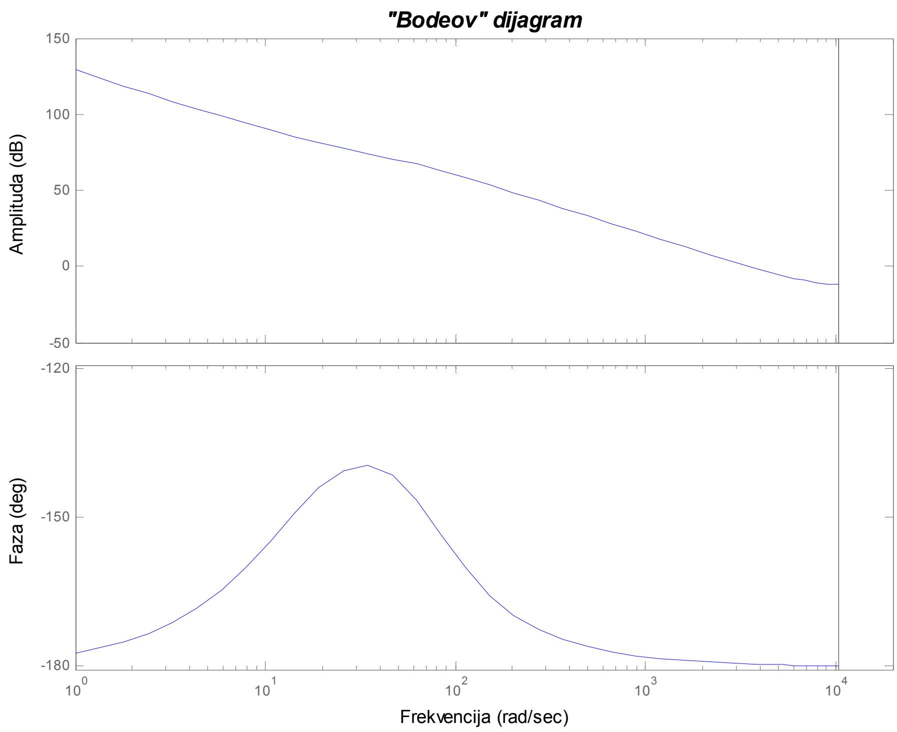
$$G_{identif}(z)=\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{z^{3}-1.97z^{2}+0.9701z}{z^{4}-3.96z^{3}+5.88z^{2}-3.882z+0.9605}\,. \qquad (7.35)$$

7.3.4 Испитивање одлика добијеног модела (корак 5)

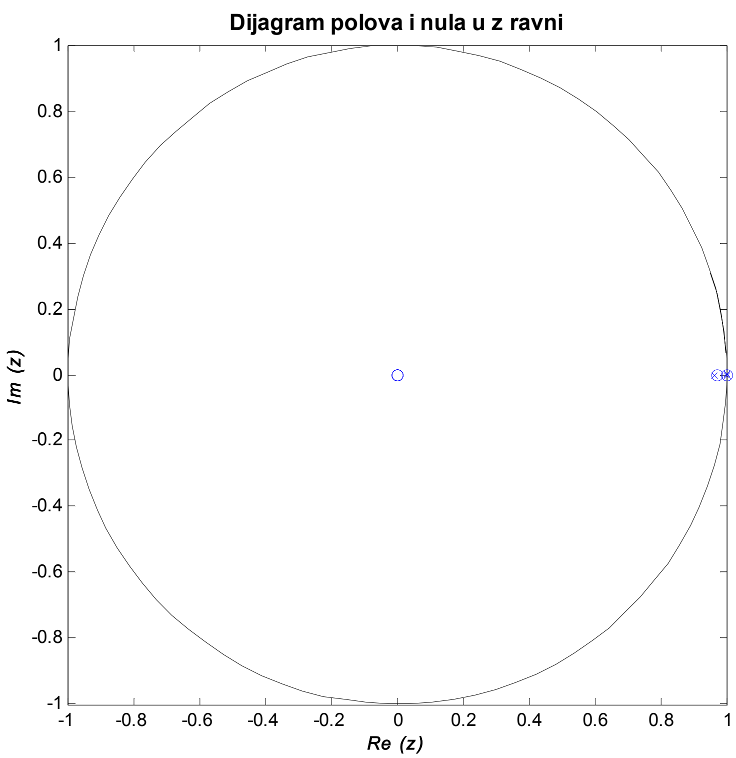
У самом процесу иднетификације, у претходном кораку за све добијене моделе су испитиване и њихове одлике. У овом одељку ћемо показати одлике за коначно добијени модел и дати кратак коментар о њима. На наредним сликама 7.20, 7.21, 7.22а и 7.22б су приказани, респективно: дијаграм транзијентног одзива модела (одзив на степ побуду), дијаграм фреквентног одзив модела (амплитудску и фазну фреквентну карактеристику) и дијаграм нула и полова модела.



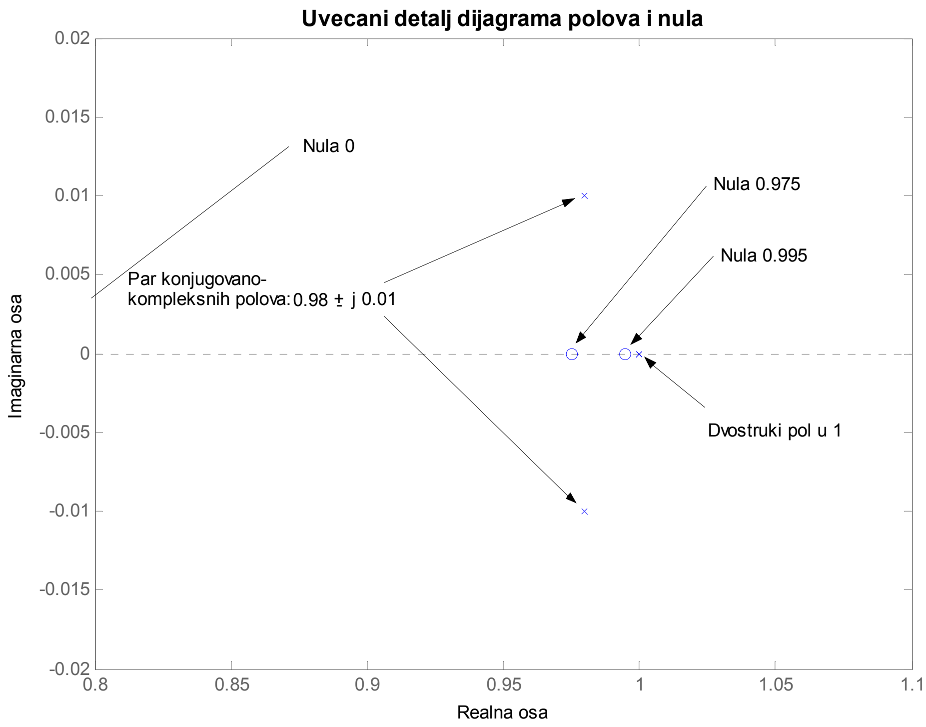
Слика 7.20 Дијаграм одзива на степ побуду система $G_{identif}(z)$



Слика 7.21Ампитудска и фазна фреквентна карактеристика система $G_{identif}(z)$



Слика 7.22а Дијаграм полова и нула система $G_{identif}(z)$

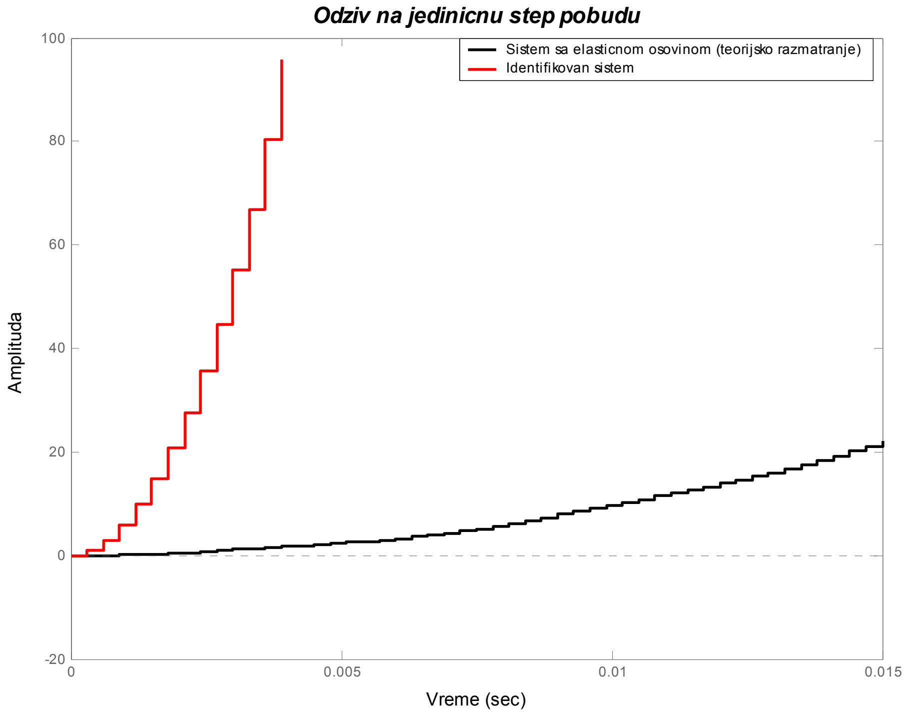


Слика 7.22б Увећани детаљ дијаграма полова и нула система $G_{identif}(z)$

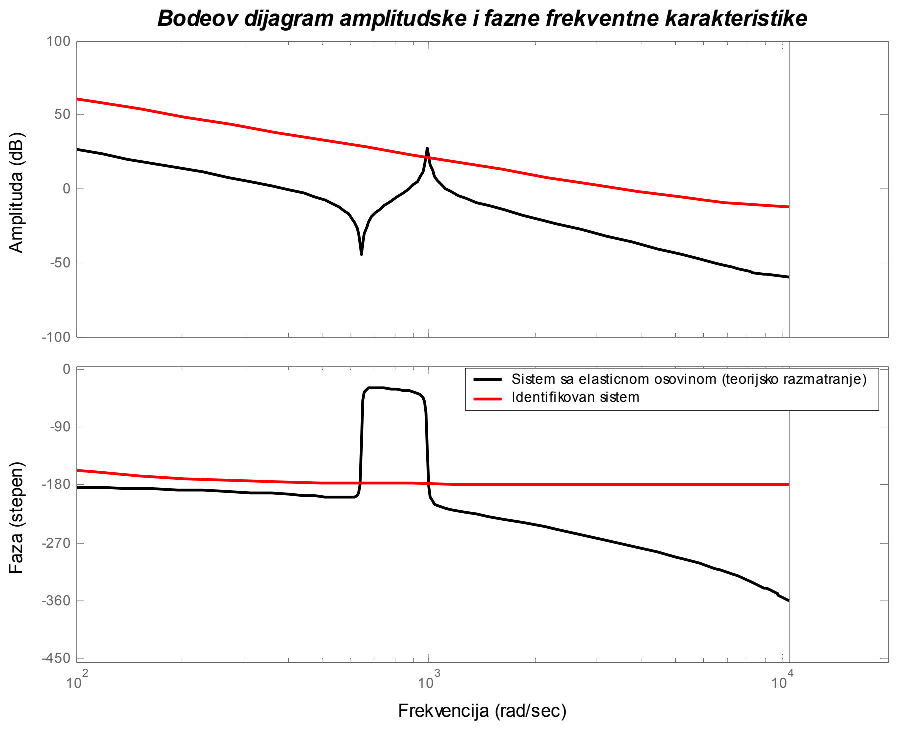
Увидом у приказане дијаграме који репрезентују карактеристике система $G_{identif}(z)$ и имајући у виду теоријска разматрања учињена у претходним поглављима, могу се повући следеће паралеле и извести следећи закључци:

- Одзив на јединични побудни сигнал – степ побуду је типичан за актуаторе – моторе чији се механички подсистем у односу на позицију вратила мотора као излазну величину, може приказати са једним моментом инерције и двоструким интегратором. На слици 7.23 приказан је упоредни приказ одзива на јединичну степ побуду идентификованог система и система са флексибилном везом мотор - оптерећење,
- Амплитудска фреквентна карактеристика која је приказана на слици 7.21 је карактеристична за системе који сачињавају чврсто спрегнути мотор и оптерећење. Упоредни приказ Бодеових амплитудских и фазних фреквентних карактеристика за идентификовани систем и систем са флексибилном везом мотор – оптерећење је приказан на слици 7.24, где се види јасна разлика између ових карактеристика.
- Увидом у распоред полова и нула на слици 7.22б уочава се да идентификован систем поред двоструког пола у нули има и пар коњуговано-комплексних полова који **су јако пригушени**, што је у складу са претходна два закључка.

Разлог овом лежи у <u>краткој осовини</u> лабораторијског setup-а и <u>већој крутости убаченог дела</u>, тако да се лабораторијски setup не понаша као систем са дистрибуираним масама које су спрегнуте еластицитетом, већ се практично понаша као систем са једним инерцијалним системом (“one-mass system”). Ради даљих истраживања потребно је продужити осовину лабораторијског setup-а и омогућити измену флексибилних спојева.



Слика 7.23 Дијаграм одзива на степ побуду идентификованог система и система са елстицитетом који је добијен теоријским разматрањем



Слика 7.24 Бодеов дијаграм амплитудске и фазне фреквентне карактеристике идентификованог система и система са елстицитетом који је добијен теоријским разматрањем

7.4 Синтеза регулатора методом подешавања полова за идентификовани модел лабораторијског SETUP-а

У складу са резултатима из претходног одељка, лабораторијски setup се може описати следећом функцијом дискретног преноса од улаза – сигнала команде електромагнетног момента до излаза – сигнала позиције осовине серво-мотора:

$$G_{identif}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{z^3 - 1.97z^2 + 0.9701z}{z^4 - 3.96z^3 + 5.88z^2 - 3.882z + 0.9605}. \tag{7.35}$$

У оквиру ***DBM03*** серворегулатора се на основу вредности позиције вредност брзине добија диференцирањем позиције, односно пропуштањем сигнала позиције кроз следећи дигитални филтар:

$$G_s(z) = \frac{4z - 4}{z}, \tag{7.36}$$

тако да се функција преноса на основу које ћемо извршити синтезу регулатора брзине методом подешавања полова, добија као:

$$G_{is} = G_{identif}(z) \cdot G_s(z) = \frac{4z^2 - 7.88z + 3.8805}{z^3 - 2.96z^2 + 2.9205z - 0.9605}. \tag{7.37}$$

Користећи се апликацијом која је описана у поглављу четири и закључцима изведеним у поглављу шест, извршено је пројектовање дигиталног регулатора брзине методом подешавања полова. За полиноме $R(z)$, $S(z)$ и $T(z)$, добијене су следеће вредности:

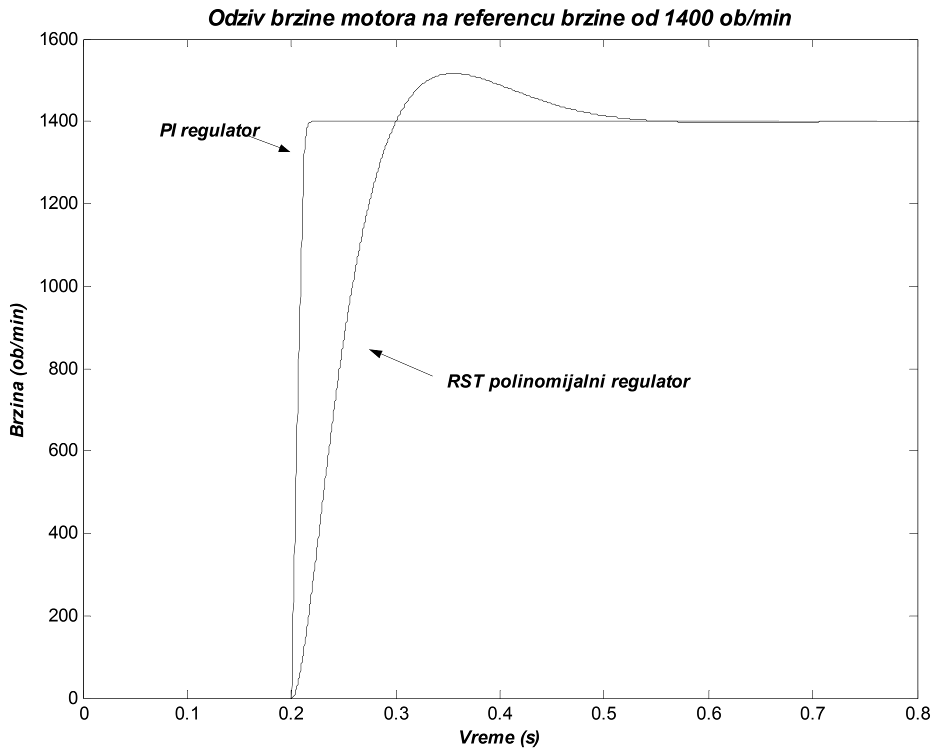
$$R(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \left(z^3 + 2.069832 \cdot z^2 - 2.229128 \cdot z + 0.237127\right), \tag{7.38}$$

$$S(z) = -0.26745 \cdot z^3 + 0.81752 \cdot z^2 - 0.83209 \cdot z + 0.28203, \tag{7.39}$$

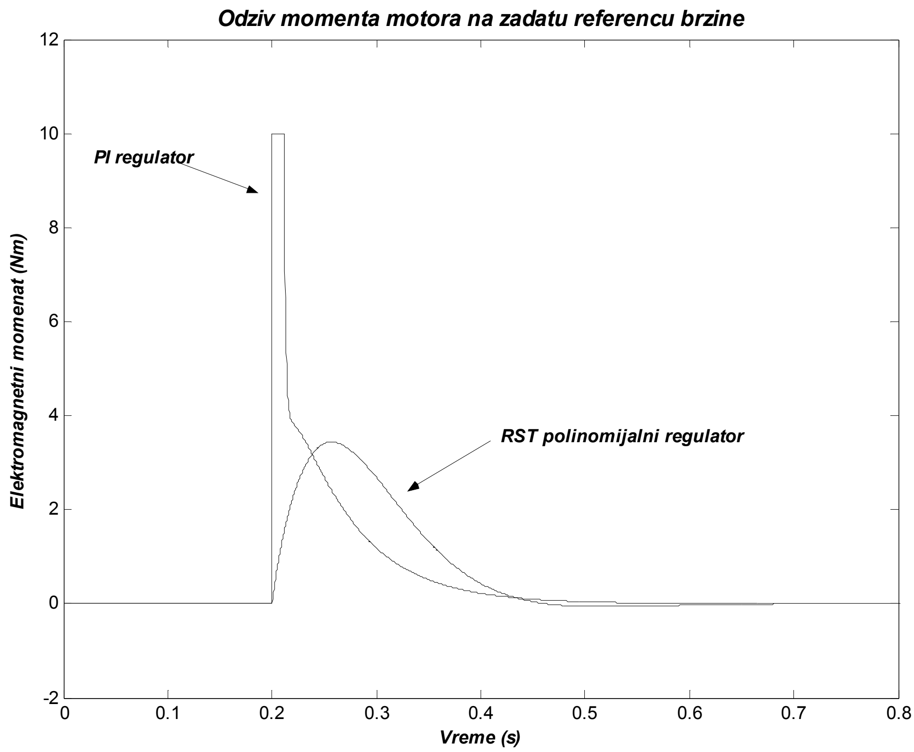
$$T(z) = 0.571220 \cdot z^2 - 0.6283420 \cdot z + 0.1370928. \tag{7.40}$$

На основу добијених резултата извршена је рачунарска симулација у **MATLAB®**-овом програмском пакету за симулацију ***Simulink***. У оквиру симулације упоређене су перформансе пројектованог регулатора методом подешавања полова и класичног регулатора брзине пропорционално-интегралног (**PI**) дејства у инкременталној форми, чији су параметри одређени према [26], [27]. На сликама 7.25 і 7.26 видимо одзив брзине вратила мотора и електромагнетног момента мотора за идентификовани лабораторијски setup, на задату референцу брзине од 1400 об/мин, за две пројектоване конфигурације дигиталног регулатора. Такође, на сликама 7.27 і 7.28 видимо одзив брзине вратила мотора и електромагнетног момента мотора за идентификовани лабораторијски setup, на дејство поремећаја у виду момента оптерећења од 5 Nm, за две пројектоване конфигурације дигиталног регулатора.

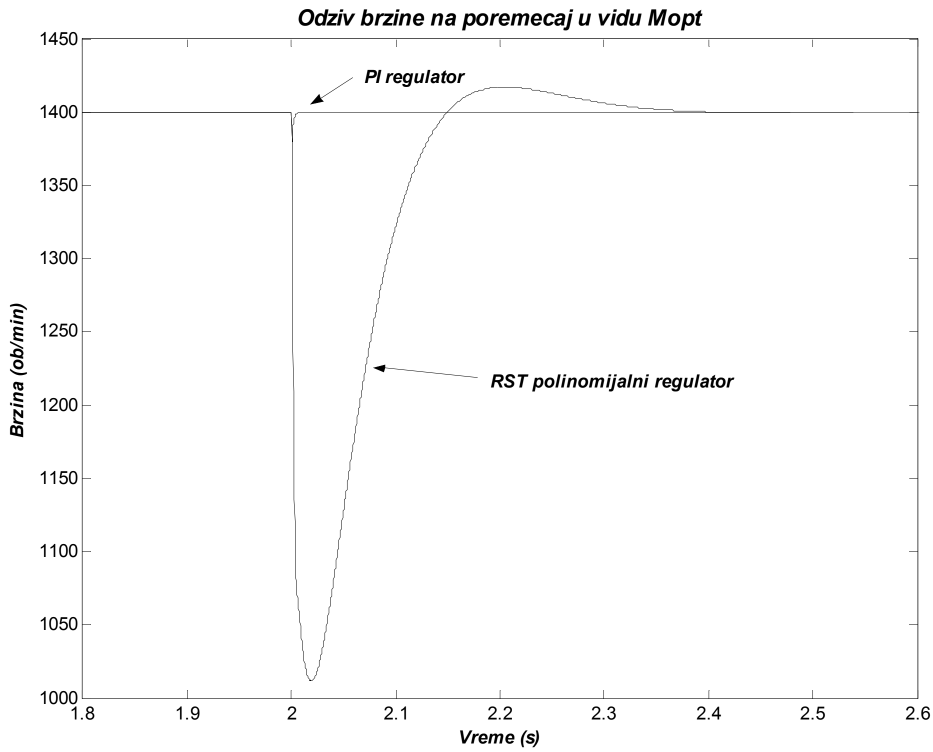
На основу датих резултата симулације види се да су перформансе класичног пропоционално-интегралног регулатора боље од пројектованог регулатора методом подешавања полова. Резултат је и очекиван будући да се, као што је већ речено, лабораторијски setup не понаша као систем са дистрибуираним масама које су спрегнуте еластицитетом, већ се практично понаша као систем са једним инерцијалним системом (“one-mass system”), где се регулатори једноставније архитектуре и нижег реда (какав је **PI** регулатор) одликују бољим перформансама.



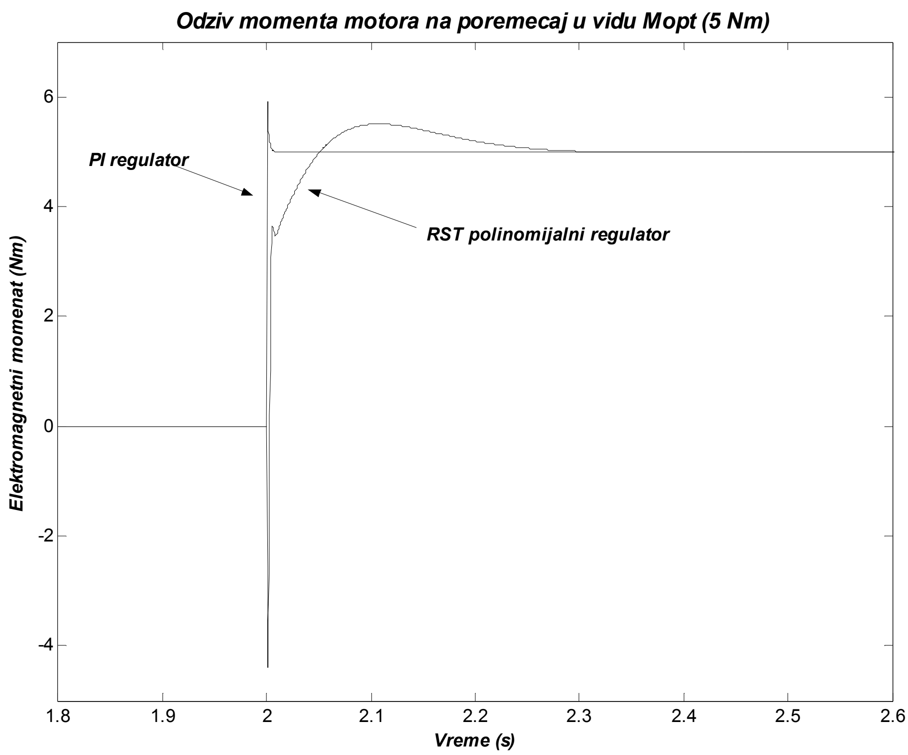
Слика 7.25 Упоредни прикази одзива брзине вратила мотора на задату референтну брзину од ***1400 об/мин*** *за случај регулатора* ***PI*** *типа и регулатора полиномијалног типа* ***(RST)****.*



Слика 7.26 Упоредни прикази одзива електромагнетног момента мотора на задату референтну брзину од ***1400 об/мин*** *за случај регулатора* ***PI*** *типа и регулатора полиномијалног типа* ***(RST)****.*



Слика 7.27 Упоредни прикази одзива брзине вратила мотора при дејству момента оптерећења од **5 Nm** *за случај регулатора* **PI** *типа и регулатора полиномијалног типа* **(RST)**.



Слика 7.28 Упоредни прикази одзива електромагнетног момента при дејству момента оптерећења од **5 Nm** *за случај регулатора* **PI** *типа и регулатора полиномијалног типа* **(RST)**.

8 ЗАКЉУЧАК

Предмет научне расправе у магистарском раду био је предлог пројектовања дигиталног закона управљања брзином код серво погона са машином наизменичне струје који са оптерећењем чини систем са дистрибуираним масама, у условима еластицитета осовине и деловања променљивог оптерећења, при чему се при пројектовању користи метод подешавања полова. У оквиру структуре овог магистарског рада, аутор је мишљења да се могу препознати следећи научни и практични доприноси, који ће бити наведени према поглављима овог рада.

У оквиру трећег поглавља:

- Извршено је детаљно систематизовање поступка пројектовања регулатора методом подешавања полова и размотрен је поступак скраћивања стабилних полова процеса, који се у литератури [1], [2], [3], [42] не разматра;
- Дефинисане су функције осетљивости система са линеарним полиномијалним регулатором које омогућавају разматрање утицаја поремећаја на систем са затвореном повратном спрегом, и
- Уведен је принцип унутрашњег модела у метод подешавања полова са полиномијалним једначинама у циљу смањења или потпуног елиминисања утицаја немерљивих поремећаја на управљану величину и у циљу елиминације грешке у праћењу референце.

У оквиру четвртог поглавља:

- Предложен је конкретан алгоритам за једнокорачни пролаз кроз процедуру пројектовања дигиталног линеарног регулатора за SISO системе, методом подешавања полова, и
- Начињена је апликација тј. графички интерфејс према кориснику (Graphical User Interface) у програмском окружењу Matlab® 6.0., која омогућује лако пролажење кроз целокупну процедуру.

У оквиру петог и шестог поглавља:

- Дефинисан је детаљан математички модел који свеобухватно третира погон који чине серво-мотор повезан са крајњим актуаторима путем трансмисионог механизма који има ограничену крутост уз ограничења које намећу: коначна периода одабирања дигиталног регулатора, несавршеност и коначни струјни капацитет инвертора из кога је мотор напајан који уноси нелинерност типа ограничења, несавршеност сензора брзине на осовини мотора који утиче на појаву високофреквентних компоненти шума мерења које се преносе на флуктуације момента и утичу на повећане губитке и деградацију перформанси и коначна дужина речи дигиталног сигналног процесора (аритметика у непокретном зарезу) који уносе проблеме квантизације променљивих у самом дигиталном регулатору, и
- Извршена је анализа и синтеза регулатора брзине серво погона са еластично спрегнутим масама користећи се методом подешавања полова, а на конкретном примеру серво погона. На нивоу рачунарских симулација кроз конкретне конфигурације погона анализиран је утицај појединих карактеристичних

параметара на стабилност система у затвореној повратној спрези, приказане су перформансе регулатора добијеног методом подешавања полова и упоређене су његове карактеристике са стандардним регулатором пропроционално-интегралног типа (**PI** регулатор).

У оквиру седмог поглавља:

- Утемељен је и приказан алгоритам за идентификацију функције преноса конкретног серво погона са еластично спрегнутим масама, и у оквиру датог алгоритма осмишљена је улазна секвенца и начин мерења одбирака улаза и излаза чији ће резултат бити адекватан сет података који обезбеђује добијање исправних и веродостојних резултата идентификације,
- На конкретном лабораторијском setup-у серво погона са еластично спрегнутим масама извршена је идентификација према наведеном алгоритму која је резултовала дискретном функцијом преноса лабораторијског прототипа, и
- За тако добијену функцију преноса извршена је синтеза линеарног полиномијалног регулатора и упоређене су његове карактеристике са стандардним регулатором пропроционално-интегралног типа (**PI** регулатор).

Резултати рада су презентирани у виду метода аналитичког пројектовања, прорачуна и програмских решења на рачунару, рачунарских симулација и експерименталних мерења на лабораторијском прототипу погона.

Аутор ће наставити активности на даљем развоју алгоритама дигиталног закона управљања серво погонима високих перформанси, и покушати у будућности да наведене целине подешавања параметара линеарног регулатора и идентификације система обједини, чиме се стварају услови за аутоматско прилагођење алгоритама управљања условима погона и обезбеђивање подешавање параметара без учешћа човека.

9 ЛИТЕРАТУРА

[1] Katsuhiko Ogata, *Discrete-time Control Systems*, Prentice Hall, New Jersey 1994.

[2] Karl J. Åström and Björn Wittenmark, *Computer-Controlled Systems*, Prentice Hall Internacional, Inc. 1984.

[3] Jürgen Ackermann, *Sampled-Data Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[4] С. Н. Вукосавић, "Микропроцесорско управљање електромоторним погонима," *белешке са предавања*, Електротехнички факултет, Београд, 1996.

[5] W. Leonhard, *Control of Electrical Drives.* New York: Springer-verlag, 1985.

[6] Б. Митраковић, *Машине за једносмерну струју.* Београд: Научна Књига, 1971.

[7] С. Н. Вукосавић, "Пројектовање адаптивног микропроцесорског управљања брзином и позицијом асинхроног мотора," *докторска дисертација*, Електротехнички факултет, Београд, 1989.

[8] Б. Митраковић и Н. Николић, *Асинхроне машине.* Београд: Научна Књига, 1967.

[9] N. Mohan, T. Undeland i W. Robbins, *Power Electronics.* New York: John Wiley & Sons, inc. 1989.

[10] F. Blaschke, "Das prinzip der feldorientierung die grundlage fur die TRANSVEKTOR regelung von drehfeld-maschinen," *Siemens Zeitschrift*, vol. 45, no. 10, pp. 757-760, 1971.

[11] K. Hasse, "On the dynamics of speed controlled static AC drives with squirrel cage induction machines," *Ph.D. dissertation*, Technische hochschule, Darmstadt, 1969.

[12] В. Вучковић, *Општа теорија електричних машина,* Београд: Наука, 1992.

[13] H. Nagase, Y. Matsuda et al.,"High performace induction motor drive system using a PWM inverter," *IEEE Trans. Ind. Appl.,* vol. IA-20, pp.1482-1489, 1984.

[14] R. D. Lorenz, "Tuning of field oriented induction motor controllers for high performance applications," *IEEE Trans. Ind. Appl.,* vol. IA-22, pp.293-297, Mar./Apr. 1986.

[15] H. Sugimoto i S. Tamai,"Secondary resistance identification of an inducton motor applied model reference adaptive system and it's characheristics," *IEEE Trans. Ind. Appl.,* vol. IA-23, pp.296-303, Mar./Apr. 1987.

[16] R. D. Lorentz i D. B. Lawson, "A simpified approach to continous online tuning of field oriented induction machine drives," *in Conf. Rec. of IEEE IAS Ann. Meet.,* pp. 444-449, 1986.

[17] M. R. Stojić i S. N. Vukosavić, "On-line tuning of the rotor time constant for vector-controlled induction motor in position control applications," *IEEE Trans. Ind. Electron.,* vol. IE-40, pp. 130-138, 1993.

[18] S. N. Vukosavić i P. Miljanić, "Instantenous feedback in voltage source inverters: Comparative study between linear and non-linear approach," *in Conf. Rec. of the IEEE third Int.Conf. on Pow. Elect.and Var. Speed Drives,* pp. 134-137, London, 1988.

[19] M. R. Stojić, "Desing of the microprocessor based digital system for DC motor speed control," *IEEE Trans. Ind. Electron.,* vol. IE-31, August, 1993.

[20] M. R. Stojić, "Direct digital speed control system: Desing and microprocessor realization," *3 Publ. Of Electrical Engineering Faculty,* Series: ETA, No. 5763, pp. 142-149, 1993.

[21] R. Lessmeier i W. Leonhard, "Microprocessor controlled inductin motor servo drive for high dynamic performance," in *Proc. Int. Conf. Evolution Modern Aspects Induction Machines* (Torino, Italy, July 8-11 1986), pp. 431-438

[22] S. C. Lin i S. J. Tsai, "A microprocessor based incremental servo system with variable structure," *IEEE Trans. Ind. Electron.,* vol. IE-31, pp. 313-316, 1984.

[23] B. K. Bose, "Sliding mode control of induction motor," *IEEE Trans. Ind. Appl.,* vol. IA-21, pp.479-486, September, 1985.

[24] H. Haneda i A. Nagao, "Digitally controlled optimal position servo of induction motor," *IEEE Trans. Ind. Electron.,* vol. IE-36, pp. 349-360, August, 1989.

[25] M. R. Stojić i S. N. Vukosavić, "Desing of microprocessor-based system for positioning sevomechanism with induction motor," *IEEE Trans. Ind. Electron.,* vol. IE-38, pp. 369-378, 1991.

[26] Ж. Марковић, С. Антић, "Израда алгоритама за управљање брзином и позицијом векторски контролисаног асинхроног мотора," *Зборник радова XLI Конф. за ЕТРАН,* пп. 440-443, Златибор, 1997.

[27] М. Перишић, С. Антић, Ж. Марковић, "Подешавање параметара ИП брзинског регулатора у условима серво система са давачем положаја ограничене резолуције," *Зборник радова XLII Конф. за ЕТРАН,* пп. 307-310, Врњачка Бања, 1998.

[28] T. Ohmae, T. Matsuda, M. Kanno, K. Saito, and T. Sukegawa, "A microprocessor-based motor speed regulator using fast-response state observer for reduction of torsional vibrations," *IEEE Trans. Ind. Applicat.,* vol. IA-23, pp. 863-871, 1987.

[29] S. Ozaki *et al.*, "A microprocessor-based dc motor drive with a state observer for impact drop suppression," *in Conf. Rec. IEEE-IAS Annu. Meeting*, pp.771-775, 1983.

[30] R. Dhauadi *et al.*, "Robust speed control of rolling mill drive systems using the loop transfer recovery desing methodology," *in Proc. IEEE IECON'91,* pp. 555-560, 1991.

[31] R. Dhauadi *et al.*, "Two degree of freedom robust speed controller for high performance rolling mill drives," *in Conf. Rec. IEEE-IAS Annu. Meeting,* pp. 400-407, 1992.

[32] J. Y. Hung, "Control of industrial robots that have transmission elasticity," *IEEE Trans. Ind. Electron.,* vol. IE-38, pp. 421-427, 1991.

[33] S. Colombi and T. Raimondi, "Compliance compensation in mechanotronic systems," *in Proc. IEEE IECON'94,* pp. 946-951, 1994.

[34] K. Sugiura and Y. Hori, "Vibration suppression in 2- and 3-mass system based on the feedback of imperfect derivative of the estimated torsional torque," *IEEE Trans. Ind. Electron.,* vol. IE-43, pp. 56-64, 1996.

[35] J. K. Ji and S. K. Sul, "Kalman filter and LQ based speed controler for torsional vibration suppression in a 2-mass motor drive system," *IEEE Trans. Ind. Electron.,* vol. IE-42, pp. 564-571, 1995.

[36] W. Leonhard, "Digital signal processong for trajectory control of a multi-axis robot with electrical servo drives," *in Proc. 15th IEEE IECON,* Philadelphia, PA, pp. 946-951, 1989.

[37] S. N. Vukosavić i M. R. Stojić, "Suppression of torsional oscillations ina a high-performace speed servo drive," *IEEE Trans. Ind. Electron.,* vol. IE-45, pp. 108-117, 1998.

[38] S. Meshkat, "Digital control design for systems with resonance problem," *in Advanced Motion Control, PCIM Reference series in power electronics and intelligent motion, Ventura, CA: Intertec communications,* pp. 9-44, 1988.

[39] T. Hasegawa *et al.*, "A microcomputer-based motor drive system with simulator following control," *in Proc. IEEE IECON'86,* pp. 41-47, 1986.

[40] M. Koyama and M. Yamo, "Two degree of freedom speed controller using reference system model for motor drive," *in Conf. Rec. EPE'91*, pp. 208-212, 1991.

[41] M. Uchiama and A. Konno, "Computer acceleration control for vibration suppresion of flexibile robot manipulators," *in Proc. 5th Int. Conf. Advanced Robotics*, Pisa, Italy, pp. 126-131, 1991.

[42] J. Deur and N. Perić, "Analysis of speed control system for electrical drives with elastic transmission," *Proc. 1999 IEEE Int. Symp. on Industrial Electronics (ISIE'99)*, Bled, Slovenia, pp. 28-37, 1999.

[43] U. Schäfer and G. Brandenburg, "Position control for elastic pointing and tracking systems with gear play and coulomb friction and aplication to robots," *in Conf. Rec. IFAC SYROCCO'91*, Wien, pp. 61-70, 1991.

[44] J. Deur and N. Perić, "Desing of polynomial speed controller for electrical drives with elastic transmission," *in Conf. Rec. EPE'99*, Lausanne, pp. 101-109, 1999.

[45] М. Стојић, *Дигитални системи управљања.* Београд: Наука, 1994.

[46] D. G. Luenberger, "An introduction to observers," *IEEE Trans. on Automatic Control,* vol. AC-16, pp. 596-601, 1971.

[47] Encyclopædia Britannica 2002, http://www.britannica.com

[48] R. Courant and H. Robins, *Diophantine equations and continued fractions.* Oxford, England: Oxford University Press, 1996.

[49] B. A. Francis and W. M. Wonham, "The internal model principle of control theory," *Automatica,* vol. 12, no. 5, pp. 457-465, 1976.

[50] W. M. Wonham, "Toward an abstract internal model principle," *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.,* vol. SMC-6, pp. 735-740, 1976.

[51] Karl J. Åström and Björn Wittenmark, *Adaptive Control*, Reading, MA: Adison - Wesley, 1989.

[52] M. Morari and E. Zafiriou, *Robust Process Control*, Uper Saddle River, NY: Prentice Hall Internacional, Inc. 1989.

[53] Ya. Z. Tsypkin and U. Holemberg, “Robust stochastic control using internal model principle and internal model control,” *Int. J. Control,* vol. 61, no. 4, pp. 809-822, 1995.

[54] M. Stojić, M. Matijević and Lj. Draganović, “A Robust Smith predictor modified by internal models for intergrating process with dead time,” *IEEE Trans. on Automatic Control,* vol. AC-46, no. 8, pp. 1293-1298, 2001.

[55] Р. Љ. Радосављевић, “Динамички моменти у сложеним електромеханичким системима са асинхроним мотором,” *докторска дисертација*, Електротехнички факултет, Београд, 1994.

[56] AD2S80 R&D Convertor, *каталошки подаци*, Analog Devices Inc., 1998.

[57] Rolf Isermann, *Digital Control System.* New York: Springer-verlag, 1981.

[58] MATLAB® 6.0, *User's guide,* MathWorks Inc., 1998.

[59] System Identification Toolbox®, Matlab® 6.0, *User's guide,* MathWorks Inc., 1998.

[60] Control System Toolbox®, Matlab® 6.0, *User's guide,* MathWorks Inc., 1998.

[61] Signal Processing Toolbox ®, Matlab® 6.0, *User's guide,* MathWorks Inc., 1998.

[62] М. Поповић, *Дигитална обрада сигнала.* Београд: Наука, 1997.