

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

СИНТЕЗА ДИГИТАЛНОГ ПОЛИНОМНОГ РЕГУЛАТОРА
БРЗИНЕ БРЗИНСКОГ СЕРВО ПОГОНА

МАГИСТАРСКА ТЕЗА

Ментор:

Проф. Др Слободан Вукосавић

Кандидат:

Милун Перишић дипл. инж.

Београд, новембар 2000.

**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**

Милун Перишић, дипл. инж.

**СИНТЕЗА ДИГИТАЛНОГ ПОЛИНОМНОГ РЕГУЛАТОРА
БРЗИНЕ БРЗИНСКОГ СЕРВО ПОГОНА**

МАГИСТАРСКА ТЕЗА

Београд, новембар 2000.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

Др Слободан Вукосавић, ванредни професор

Др Милић Стојић, редовни професор

Др Радован Радосављевић, доцент

Др Зоран Лазаревић, ванредни професор

Др Зоран Стојиљковић, ванредни професор

ABSTRACT

Modern AC-motor based speed servo systems have been widely used in numerous automated factory systems. Those systems implied the presence of dust, oil-vapours, mechanical vibrations and elevated temperatures, that makes the use of incremental and rotational encoders very difficult. Therefore, in modern speed servo systems, used robust elektromagnetic resolver along with resolver-to-digital (R/D) converter for measurement the position of motor shaft. The resolution of the R/D converter is presented by the user and can be changed in dependence on rotational speed. The resolver-based speed servo systems become suitable even for high performance tasks such as robot servos and precise tools machine. On the other hand, should pay attention on the finite bandwidth of R/D converter which brings in a certain delay in the position feedback. Along with the delay of the electromagnetic torque controller, it can be cause of unadopted overshoot of the regulated speed. Thereby, performance limits of both R/D converter and the electromagnetic torque controller should be taken into account when designing the speed servo systems.

In this thesis, the proposed is a straightforward procedure for optimal tuning of the polynomial speed controller parameters in the presence of a position sensor and an actuator performance limits. Polyomial speed controler has the RST form and is designed by pole-placement method. The controller parameters are tuned to obtain the strictly aperiodical step response of the regulated speed with as high bandwidth as possible. Also, the proposed is a modified structure of an observer polynomial in order to produce low-noise speed feedback. Parametric optimization of the polynomial speed controller which is proposed in this thesis gives optimal values for poles closed loop systems and opserver polynomial. The effectiveness of this analytical design is confirmed by computer simulations.

РЕЗИМЕ

Савремени брзински сервомеханизми који се користе у аутоматизованим фабричким постројењима за извршни орган користе машину наизменичне струје (МНС). Ова постројења подразумевају присуство прашине, уљних пара, механичке вибрације и повишену температуру, што отежава примену инкременталних и обртних енкодера за мерење положаја-давача. Због тога се у савременим брзинским сервомеханизмима за мерење положаја осовине мотора користи робусни електромагнетски ризолвер заједно са *resolver-to-digital* (R/D) конвертором. Резолуција R/D конвертора бира се од стране корисника и може се мењати у зависности од брзине обртања. Брзински сервомеханизми са R/D конвертором налазе примену и у системима високог квалитета динамичког понашања као што су роботски механизми и алатне машине велике прецизности. Са друге стране треба имати у виду коначни пропусни опсег R/D конвертора односно, кашњење које он уноси у повратну спрегу брзинске регулационе петље. Заједно са кашњењем актуатора, то може бити узрок неприхватљивих пребачаја у регулисаној брзини. Због тога при структурној синтези брзинске регулационе петље и при избору параметара регулатора брзине, у обзир треба узети кашњење R/D конвертора и актуатора.

О уквиру овог магистарског рада се предлаже метод оптималног подешавања параметара полиномног регулатора брзине који уважава коначне перформансе давача и актуатора. Полиномни регулатор брзине има *RST* форму и пројектован је помоћу *pole-placement* методе. Параметри регулатора брзине се бирају тако да се добије стриктно апериодичан одскочни одзив регулисане брзине уз максималну вредност пропусног опсега. Такође предлаже се и модификована структура полинома опсервера која обезбеђује низак ниво шума у сигналу мерене брзине. Параметарска оптимизација полиномног регулатора брзине, предложена у овом раду, даје оптималне вредности полова система са затвореном повратном спрегом и полова полинома опсервера за дати брзински сервомеханизам са еластично спрегнутим оптерећењем. Веродостојност резултата аналитичког пројектовања потврђена је симулацијама на дигиталном рачунару.

САДРЖАЈ

| | |
|---|----|
| 1. УВОД | 1 |
| 2. МЕТОДА ПОДЕШАВАЊА ПОЛОВА | 5 |
| 2.1. Погодан закон управљања | 6 |
| 2.2. Скраћивање полова и нула | 9 |
| 2.3. Алгебарски проблем | 11 |
| 2.3.1. Решење Диофантове једначине помоћу Силвестрове матрице | 12 |
| 2.3.2. Решење Диофантове једначине Еуклидовим алгоритмом | 15 |
| 2.4. Каузалност | 19 |
| 2.5. Осетљивост на грешке при моделовању процеса | 21 |
| 2.6. Осетљивост на шум мерења и поремећај оптерећења | 25 |
| 3. КОМПОНЕНТЕ БРЗИНСКОГ СЕРВО СИСТЕМА | 27 |
| 3.1. Инвертор | 27 |
| 3.1.1. PWM инвертор са линеарним струјним регулатором | 28 |
| 3.1.2. Моделовање актуатора | 29 |
| 3.2. Мерење позиције | 33 |
| 3.2.1. Електромагнетни ризолвер са синхроконвертором | 34 |
| 3.2.2. Моделовање синхроконвертора | 35 |
| 3.2.3. Шум у сигналу повратне спреге | 37 |
| 3.3. Модел механичког подсистема | 38 |
| 3.3.1. Математички модел механичког подсистема | 39 |
| 4. СИНТЕЗА ПОЛИНОМНОГ РЕГУЛАТОРА | 41 |
| 4.1. Дискретизација континуалног дела система процеса | 42 |
| 4.2. Полином опсервера $A_0(z)$ | 45 |
| 4.2.1. Параметарска оптимизација за систем трећег реда | 46 |
| 4.2.2. Параметарска оптимизација за систем петог реда | 50 |
| 5. РАЧУНАРСКЕ СИМУЛАЦИЈЕ | 58 |
| 5.1. Рачунарске симулације за систем трећег реда | 59 |
| 5.2. Рачунарске симулације за систем петог реда | 69 |
| 5.3. Закључак | 77 |
| 6. ЛИТЕРАТУРА | 78 |
| Додатак А | 79 |
| Додатак Б | 85 |
| Додатак Ц | 90 |

1. УВОД

Проблем којим се бави овај магистарски рад је метода подешавања полова заснована на полиномном дизајну дигиталног регулатора, који се користи у систему са затвореном повратном спрегом. У овом случају ради се о брзинском сервомеханизму који као актуатор електромагнетског момента користи мотор наизменичне струје напајан струјним напонски регулисаним инвертором. Негативна повратна спрега остварује се по угаоној брзини вратила мотора која се мери израчунавањем инкремента позиције вратила.

Мотори наизменичне струје, а посебно асинхрони мотори, све више потискују једносмерне моторе за примене у индустријским погонима. Две основне предности асинхроног у односу на мотор једносмерне струје су мањи габарит и цена одржавања. Мотор једносмерне струје има предност у једноставности управљања флуksom и излазним моментом мотора. Међутим, векторски управљан мотор наизменичне струје је еквивалентан мотору једносмерне струје. Код обе врсте мотора струјним лимитом је ограничен максимални момент који ограничава брзину одзива.

За квалитетну регулацију мотором наизменичне струје заслужна је појава, како претварача са наизменичним излазним напоном променљивог напона и учестаности, тако и дигиталних процесора велике брзине. На овај начин је омогућена имплементација распрегнутог управљања флуksom мотора у ваздушном зазору и електромагнетским, а на тај начин и корисним, моментом мотора који зависе од одговарајућих компоненти статорске струје. Оваквим управљањем мотор наизменичне струје поприма карактеристике које му омогућавају да оствари жељене радне режиме са великим опсегом промене брзине уз одговарајући пропусни опсег. Када се мисли на пропусни опсег једног сервопгона, треба рећи да је пожељно да пропусни опсег сервопгона буде што већи, али треба имати у виду да у неким применама мотора наизменичне струје то није неопходно. Наиме одговарајуће апликације захтевају одређене пропусне опсеге, као и примену одговарајућег мотора наизменичне струје. Поред асинхроног мотора веома широку примену имају и синхрони мотори и то са сталним магнетима на ротору. Наравно они не могу да се користе за велику промену брзина у области слабљења поља као асинхрони мотори.

Квалитетно векторско управљање излазним моментом мотора се може остварити једино када је обезбеђена висококвалитетна регулација статорске струје [2]. Под тим се подразумева регулација која обезбеђује да брзина одзива

статорске струје буде бар десет пута већа од брзине одзива спољне петље било да се ради о позиционом или брзинском управљању. Висококвалитетно управљање подразумева нулту грешку у стационарном стању на задату вредност струје или бар што мању грешку. Решавање проблема висококвалитетног управљања асинхроним мотором се решавају на два начина: аналогном и дигиталном струјном регулацијом. Под претпоставком да је обезбеђена квалитетна регулација статорске струје, потребно је обезбедити и квалитетну регулацију брзине, односно позиције мотора. Стога се приступа синтези одговарајућег регулатора који ће имајући у виду динамику процеса обезбедити да грешка на улазну референцу са и без присуства споропроменљивих поремећаја, у стационарном стању буде једнака нули и да се обезбеди одговарајућа динамика одзива у прелазном процесу. Рецимо да је један од захтева апериодичан одзив на референтни улаз типа одскочне функције.

Често постоји више оправданих захтева које један овакав регулациони систем треба да обезбеди. Ти захтеви укључују у себе факторе који се односе на карактеристике одзива система на референтну вредност, неосетљивост на шум мерења и варијације параметара процеса, zasiћења извршног органа и утицаја поремећаја. Сазнања која се заснивају на искуственим показатељима говоре да се у већини процеса регулациони захтеви могу испунити применом PID контролера. Интересантно је нагласити да се најчешће примењују регулатори PI типа, без диференцијалног дејства. PI регулација је адекватна за све процесе чија се динамика може представити функцијом преноса првог реда, што не мора да значи да ову структуру регулатора није могуће применити у процесима вишег реда. У овим процесима обезбеђивање нулте грешке стационарног стања се постиже интегралним дејством регулатора, а одговарајући прелазни режим пропорционалним дејством. PID регулатор се користи у системима другог реда, са различитим временским константама где до изражаја долази диференцијално дејство регулатора, али треба нагласити да овај регулатор због свог диференцијалног дејства није погодан код процеса са знатним временским кашњењем.

Развој дигиталних процеса ја омогућио проширење могућности реализације сложених алгоритама управљања. Мисли се на то да се дигиталним регулаторима може постићи виша сложеност управљања од аналогних регулатора који се могу имплементирати са пропорционалним, интегралним и диференцијалним модулима. Предност дигиталног регулатора огледа се и у томе што он може узети функције више аналогних регулатора, може комуницирати са другим дигиталним регулаторима, програмски мењати како параметре управљања тако и алгоритме управљања. Програмска подршка дигиталног регулатора се једноставно може мењати у току експлоатације или у току пројектовања регулатора.

Постоји више форми за реализацију дигиталних регулатора. Свака од њих на свој начин доприноси једноставности реализације на дигиталном процесору. Приликом програмске реализације дигиталног регулатора најчешће се користи рекурзивни алгоритам који се заснива на представљању функција дискретног преноса еквивалентним диференцијским једначинама. Имплементација функције дискретног преноса дигиталног регулатора постиже се линеарним програмом који се релативно једноставно изводи: у сваком тренутку одабирања вредност излазног сигнала регулатора је линеарна комбинација одговарајућег броја улазних сигнала у претходним периодима одабирања и исто тако одговарајућег броја вредности излазног сигнала. Ако се све рачунске операције за остваривање дате линеарне комбинације обављају у времену краћем од периоде одабирања, дакле пре пристизања следећег одбирка на улаз дигиталног регулатора, за дати регулатор се каже да ради у реалном времену [3]. Треба нагласити да је дигитални регулатор физички остварљив, потребно је и довољно да степен полинома у имениоцу функције дискретног преноса регулатора буде већи или једнак степену полинома у бројиоцу те функције.

Да би се на дигиталном процесору могла извести функција преноса дигиталног регулатора мора се познавати његова форма. Често се у једном дигиталном регулатору може поред једног излаза јавити више улаза. Најчешће дигитални регулатор има један или два улаза.

У литератури [2] се предлаже структура дигиталног регулатора са улазима сигнала излаза процеса који може бити контаминиран шумом услед мерења излазног сигнала и референтним сигналом. Овај вид регулатора ће детаљније бити обрађен у другом поглављу. Предности оваквог типа регулатора су његова једноставност, како у разумевању тако и у имплементацији. Недостатак је што се у његовој форми не види улога полинома опсервера, која је, а што ће се доказати у четвртном поглављу, битна за остваривање жељених карактеристика система са затвореном повратном спрегом.

У литератури [4], се предлаже структура дигиталног регулатора са опсервером и повратном спрегом по вектору стања. Детаљнију анализу синтезе полинома опсервера је дао Grübel у литератури [5], где је овај полином конструисао помоћу линеарних једначина. У овом поступку се ипак претпоставља дигитални регулатор малог реда.

У литератури [6], се уводи форма дигиталног регулатора у грани грешке. Полови и нуле дигиталног регулатора су једнаки половима и нулама процеса који се желе скратити, па је овакав вид регулатора осетљив на нетачно моделовање функције дискретног преноса процеса. За овакву форму регулатора публиковано је више радова у области континуалних сигнала.

У литератури [7], дигитални регулатор је имплементиран у грани повратне спреге као однос два полинома, а у грани референце је уведено појачање које обезбеђује одговарајуће статичко појачање система са затвореном повратном спрегом. У синтези полинома у грани повратне спреге аутор користи полином опсервера минималног реда који има *deadbeat* форму. Аналитички приступ одређивању реда полинома није дат као што је то урађено у литератури [2].

Овај магистарски рад је састављен из пет поглавља. После овог поглавља уводног карактера, у другом поглављу је детаљно описана процедура подешавања полова за систем са познатом функцијом дискретног преноса.

У трећем поглављу дат је опис структуре континуалног дела брзинског сервомеханизма, са свим његовим елементима уважавајући и реална ограничења која се јављају у мерењу угаоне брзине и позиције вратила мотора, као и у самом управљању мотором.

У четвртном поглављу предлаже се структура дигиталног регулатора, где ће се објаснити поступак одређивања и синтеза, као и начин на који се долази до решења.

У петом поглављу дати су резултати симулација, за различите режиме рада мотора као и за различите конфигурације дигиталног регулатора, који зависи од реда процеса којим се управља.

На крају је у кратком закључку одговорено на проблеме који се могу јавити приликом пројектовања овог типа регулатора, као што је показана и оправданост примене оваквог типа регулатора.

У прилогу А дат је уопштени облик коефицијената функције дискретног преноса за континуалне системе трећег и петог реда.

У прилогу Б дат је листинг програмског кода који се користи при синтези дигиталног регулатора.

У прилогу Ц приказан је симулациони модел брзинског сервомеханизма, са одговарајућим структурама дигиталног регулатора.

2. МЕТОДА ПОДЕШАВАЊА ПОЛОВА

Pole placement или метода подешавања полова, је скуп метода за креирање жељених карактеристика система са затвореном повратном спрегом. *Pole placement* са полиномним дизајном се заснива на алгебарским операцијама са полиномима. Ова метода је једноставна за коришћење и разумевање. Могу се увести различита ограничења, као што су висока појачања кружне петље за одређене учестаности f .

Дизајн се најчешће заснива на датом моделу, критеријумима и прихватљивим законима управљања. Претпоставимо да процес има један улаз u и један мерљив излаз y . Однос између излаза и улаза је добијен као функција дискретног преноса

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.1)$$

где су $A(z)$ и $B(z)$ полиноми. Функција дискретног преноса представља динамику процеса, садржавајући коло задршке нултог реда, актуатор момента и сензор на осовини мотора. Убудуће ће се сматрати да $A(z)$ и $B(z)$ немају заједничке факторе.

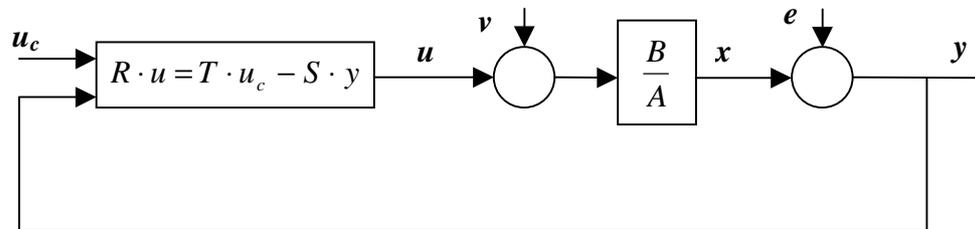
Особине система са затвореном повратном спрегом су представљене жељеном функцијом дискретног преноса

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (2.2)$$

где $B_m(z)$ и $A_m(z)$ немају заједничких фактора. У општем случају, то није довољно за спецификацију $H_m(z)$. Поред излаза повратне спреге, може се јавити динамика која није добијена управљачким сигналом. Такође је неопходно специфицирати динамику опсервера.

2.1. Погодан закон управљања

Дигитални регулатор представљен на слици има два улаза: u_c и мерљиви излаз y и један излаз u .



Слика 2.1 Блок дијаграм система са затвореном повратном спрегом.

На слици је функција дискретног преноса процеса окарактерисана као однос два полинома $B(z)$ и $A(z)$ који немају заједничких нула. Сигнали v , x и e су редом сигнал поремећаја, излаз процеса и шум мерења.

Закон управљања се може написати као

$$R(z) \cdot u = T(z) \cdot u_c - S(z) \cdot y. \quad (2.3)$$

Да би систем имао физичког смисла, тј. да би систем био каузалан морају се задовољити неједнакости

$$\deg R(z) \geq \deg T(z) \quad \text{и} \quad \deg R(z) \geq \deg S(z) \quad (2.4)$$

Ако је време израчунавања управљачког сигнала у компјутеру мали део периоде одабирања, тада је природно захтевати да

$$\deg R(z) = \deg T(z) = \deg S(z). \quad (2.5)$$

Ово би значило да нема временског кашњења у функцији дискретног преноса регулатора.

Ако је време израчунавања управљачког сигнала близу периоде одабирања, одговарајуће ограничење се мења у

$$\deg R(z) = 1 + \deg T(z) = 1 + \deg S(z). \quad (2.6)$$

То значи да у управљању постоји временско кашњење од једне периоде одабирања.

Да би систем био мање осетљив на високофреквентне шуме потребно је да кружно појачање

$$H_{lg}(e^{j\omega T}) = \frac{S(e^{j\omega T}) \cdot B(e^{j\omega T})}{R(e^{j\omega T}) \cdot A(e^{j\omega T})} \quad (2.7)$$

има велику вредност за мале учестаности. То се може постићи одговарајућим избором полинома $R(z)$ на следећи начин

$$R(z) = (z - 1)^l \cdot R_1'(z), \quad (2.8)$$

са одговарајућим l које је иначе цео број. Једначином (2.8) представљен је интегрални принцип управљања. Овај услов обезбеђује да је систем са затвореном повратном спрегом незнатно осетљив на грешке при моделовању процеса, проузроковане преносом сигнала ниске учестаности.

Утицај несавршености у високофреквентној динамици процеса и високофреквентном мерном шуму се мора смањити избором $S(z)$ и $R(z)$ тако да кружно појачање брзо опада за високе учестаности. Периода одабирања је веома битна у овом разматрању, зато што комбинација *antialiasing* филтра и кола задршке нултог реда слаби пренос сигнала за фреквенције изнад Никвистове. На тај начин избор периоде одабирања има посебан значај на осетљивост система на дејство поремећаја високе учестаности и грешке при моделовању процеса.

Постоје случајеви у којима кружно појачање мора бити ниско за неке учестаности које су мање од пропусног опсега сервосистема. Може се десити да при постојању великих периодичних шума или постојања брзих промена фаза у преносу сигнала, сервосистем не може да смањи њихов утицај. Типичан пример су поремећаји код космичких возила. Ови типови поремећаја се класично сузбијају увођењем *notch* филтара који не пропуштају сигнале одређене учестаности. У методи *pole placement* се исти ефекат може остварити увођењем фактора у полиному $S(z)$.

Метод пројектовања дигиталног регулатора *pole placement* методом не узима у обзир конкретан модел поремећаја. Поремећаји се уводе индиректно, увођењем ограничења на управљање процесом исказаним функцијом дискретног преноса $H_m(z)$. Пошто је управљачки сигнал у једној периоди функција сигнала излаза процеса и управљачког сигнала у претходним периодама одабирања, у условима непознавања комплетног вектора стања, поред функције дискретног преноса система са затвореном повратном спрегом $H_m(z)$ је потребно и дефинисати динамику опсервера, његовим карактеристичним полиномом $A_o(z)$.

Преносна функција процеса је дефинисана односом излаза и улаза процеса који задовољавају једнакост

$$A(z) \cdot y = B(z) \cdot u, \quad (2.9)$$

где је u управљачки сигнал а y мерљиви излаз.

Проблем пројектовања дигиталног регулатора је јасно представљен следећом реченицом. За дати систем описан функцијом дискретног преноса (2.1) треба пројектовати дигитални регулатор који ће заједно са процесом према слици 2.1 обезбедити жељену функцију преноса система са затвореном повратном спрегом (2.2). На слици су такође представљени и поремећаји.

Функција преноса система са затвореном повратном спрегом може се добити из једначина (2.3) и (2.9) елиминисањем управљачког сигнала u . Тада је

$$[A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)] \cdot y = B(z) \cdot T(z) \cdot u_c. \quad (2.10)$$

Пошто однос излаза и улаза треба да буде еквивалентан изразу (2.2) тада се може написати једнакост

$$\frac{B(z) \cdot T(z)}{A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (2.11)$$

Значи проблем дизајна дигиталног регулатора је налажење полинома $R(z)$, $S(z)$ и $T(z)$ који задовољавају (2.11) и додатне захтеве у жељеном закону управљања од којих је најважнији да систем буде стабилан. Јасно је да једначина (2.11) има бесконачно много решења по полиномима $R(z)$, $S(z)$ и $T(z)$, али нису сва решења задовољавајућа. Генерално се може извести закључак да ред полинома $R(z)$, $S(z)$ и $T(z)$ може варирати од неког минималног па до произвољно великог реда под условом да је систем са затвореном повратном спрегом стабилан. Једноставно ограничење је да нуле полинома $R(z)$ не смеју лежати ван јединичног круга у комплексној z равни, јер се на тај начин динамика регулатора чини нестабилном управо на месту полинома $R(z)$. Најчешће овај полином дели грешку која настаје као разлика референтног сигнала помноженим полиномом $T(z)$ и сигнала излаза процеса помноженог полиномом $S(z)$. Стога је и максимално допустиви ред ових полинома ограничен не само каузалношћу закона управљања већ и жељеном динамиком коју треба да има систем са затвореном повратном спрегом.

2.2 Скраћивање полова и нула

Из једначине (2.11) следи да се полови система са затвореном повратном спрегом садрже у решењима карактеристичне једначине

$$A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z) = 0 \quad (2.12)$$

Нуле система са затвореном повратном спрегом су нуле полинома $B(z)$ и $T(z)$. Степен једначине (2.12) је често већи од степена карактеристичног полинома $A_m(z)$, па се због тога морају скратити неке нуле и полови на левој страни једнакости (2.11).

Прво се разматрају нуле система са отвореном петљом, тј. нуле полинома $B(z)$. Ако нула полинома $B(z)$ није истовремено нула полинома $B_m(z)$, тада она мора бити једно од решења једначине (2.12), па се на тај начин та нула скраћује са полом. Пошто систем са затвореном повратном спрегом мора бити стабилан следи да се могу скраћивати само стабилне нуле, тј. нуле које леже унутар јединичног диска.

Сходно претходном излагању полином $B(z)$ се може факторизовати на следећи начин

$$B(z) = B^+(z) \cdot B^-(z), \quad (2.13)$$

где $B^-(z)$ има све нуле изван јединичног диска, а $B^+(z)$ све нуле унутар јединичног диска. Пожељно је због једноставније процедуре израчунавања полинома факторизовати $B(z)$ тако да полином $B^+(z)$ буде моничан.

Пошто полином $B(z)$ не може бити фактор од $A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)$ следи да се $B_m(z)$ може факторизовати на следећи начин

$$B_m(z) = B^-(z) \cdot B_m^+(z). \quad (2.14)$$

Из тога следи да се нестабилне нуле процеса неће променити, али се морају садржати у $B_m(z)$. Пошто је $B^+(z)$ фактор од $A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)$, следи да је такође и фактор од полинома $R(z)$. Тада је

$$R(z) = B^+(z) \cdot R^+(z). \quad (2.15)$$

Једначина (2.11) тада може да се напише као

$$\frac{B^+(z) \cdot B^-(z) \cdot T(z)}{B^+(z) \cdot [A(z) \cdot R^+(z) + B^-(z) \cdot S(z)]} = \frac{B^-(z) \cdot B_m^+(z)}{A_m(z)}, \quad (2.16)$$

која се после сређивања може написати у простијем облику

$$\frac{T(z)}{A(z) \cdot R^+(z) + B^-(z) \cdot S(z)} = \frac{B_m^+(z)}{A_m(z)}, \quad (2.17)$$

из чега се може закључити да је $A_m(z)$ фактор од $A(z) \cdot R^+(z) + B^-(z) \cdot S(z)$. Осим тога у једначини (2.17) треба приметити да не мора увек бити задовољена директна једнакост између полинома у бројиоцу и имениоцу са леве и десне стране једнакости. Оно што се не види из ове једначине јесте скраћивање полинома опсервера $A_o(z)$ у бројиоцу и имениоцу функције преноса од референтног улаза до излаза система. Зато следи да је $A_o(z)$ фактор од $A(z) \cdot R^+(z) + B^-(z) \cdot S(z)$, па се може написати следећа једнакост

$$A(z) \cdot R^+(z) + B^-(z) \cdot S(z) = A_o(z) \cdot A_m(z) \quad (2.18)$$

и

$$T(z) = B_m^+(z) \cdot A_o(z). \quad (2.19)$$

Карактеристична једначина система тада постаје

$$A(z) \cdot R^+(z) + B^-(z) \cdot S(z) = B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z). \quad (2.20)$$

Тада се полови система са затвореном повратном спрегом скраћују стабилним нулама процеса $B^+(z)$, и половима опсервера $A_o(z)$. Ова једначина има неколико имена. Често је зову Диофантовом једначином, по грчком математичару Диофанту. Иначе Диофант је живео у Александреји (246?-330? н.е.) и он је био један од првих проналазача алгебре. Понекад се ова једначина зове Безуов идентитет. Како каже *Vidyasagar* ова једначина би требало да носи име по Индусу који се звао *Ariabhata* (рођен 476). Он је био први математичар који је формулисао и нашао сва решења ове једначине. Према томе за ову једначину се може увести и скраћено име *DAB*, по именима ова три математичара (*Diophantus-Ariabhata-Bezout*). Треба имати у виду да се Диофант и Ариабата нису бавили полиномним једначинама већ једначинама са целобројним коефицијентима.

У пракси је корисно имати строге захтеве за скраћивање полова и нула. Понекад скраћивање није пожељно. У другим случајевима може бити оправдано скраћивање нула када је пригушење довољно добро. Скраћивањем

нула се може постићи већи пропусни опсег система, али уз *ringing* у управљачком сигналу.

2.3. Алгебарски проблем

Као што се могло видети у претходном поглављу одређивање полинома $R(z)$, $S(z)$ представља алгебарски проблем. Проблем се може поистоветити са Диофантовом једначином добро познатом једначином у линеарној алгебри.

$$a \cdot x + b \cdot y = c. \quad (2.21)$$

Решење Диофантове једначине су целобројна решења x_0 и y_0 , али је потребно нагласити да ова једначина нема целобројна решења ако највећи заједнички делилац бројева a и b није делилац броја c . Остала решења ове једначине су

$$x = x_0 + t \cdot b \quad \text{и} \quad y = y_0 - t \cdot a, \quad (2.22)$$

где је t произвољан цео број. Као што се може приметити постоји бесконачно много решења која задовољавају једначину (2.21).

Интересантно је применити резултате који се добијају са целим бројевима на полиномне једначине као што је на пример једначина (2.20). То је у потпуности оправдано зато што цели бројеви и полиноми са реалним коефицијентима имају исте алгебарске особине. Као што два помножена или сабрана цела броја дају цео број, тако и два помножена или сабрана полинома са реалним коефицијентима дају полином са реалним коефицијентима. Међутим, дељење два цела броја, па и полинома са реалним коефицијентима не даје увек цео број или полином.

Једначина (2.20) се може решити на више начина. Овде ће бити представљени неки начини решавања полиномне Диофантове једначине. Са аспекта примене одговарајућег алгоритма решавања дате једначине, треба имати у виду реално време за које се одговарајући алгоритам може остварити на неком микропроцесору. Ову једначину за системе малог реда је једноставно решити методом поређења коефицијената са леве и десне стране једначине (2.20). Међутим, незахвално је примењивати ту методу за системе вишег реда због отежаног израчунавања, па се користе алгоритми попут матричног рачуна са Силвестровом матрицом, као и Еуклидов алгоритам примењен на полиномне једначине. Треба напоменути да је за софтверску реализацију погоднији први од ова два алгоритма због једноставности у писању кода програмом и једноставности самог алгоритма.

2.3.1. Решење Диофантове једначине помоћу Силвестрове матрице

Нека је процес дефинисан функцијом дискретног преноса

$$\frac{y}{u} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (2.23)$$

где је

$$A(z) = z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 \quad (2.24)$$

$$B(z) = b_n \cdot z^n + b_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + b_1 \cdot z + b_0. \quad (2.25)$$

Ако је систем потпуно контролибилан и опсервабилан, тада $A(z)$ и $B(z)$ немају заједничких нула.

Дефинишимо стабилан полином $D(z)$ степена $2n-1$

$$D(z) = d_{2n-1} \cdot z^{2n-1} + d_{2n-2} \cdot z^{2n-2} + \dots + d_1 \cdot z + d_0. \quad (2.26)$$

Тада постоје јединствени полиноми $(n-1)$ -степен $R_0(z)$ и $S_0(z)$

$$R_0(z) = z^{n-1} + r_{n-2} \cdot z^{n-2} + \dots + r_1 \cdot z + r_0 \text{ и} \quad (2.27)$$

$$S_0(z) = s_{n-1} \cdot z^{n-1} + s_{n-2} \cdot z^{n-2} + \dots + s_1 \cdot z + s_0 \quad (2.28)$$

такви да полиномна Диофантова једначина

$$R_0(z) \cdot A(z) + S_0(z) \cdot B(z) = D(z) \quad (2.29)$$

буде задовољена.

Коефицијенти полинома $R_0(z)$ и $S_0(z)$ се могу наћи једноставним поређењем коефицијената у члановима са истим степеном по променљивој z . Други начин, а са гледишта једноставности израчунавања коефицијената лакши, је налажење матрице **RS**

$$\mathbf{RS} = [r_0 \quad r_1 \quad \dots \quad r_{n-2} \quad 1 \quad s_0 \quad s_1 \quad \dots \quad s_{n-2} \quad s_{n-1}]_{2,n \times 1}^T \quad (2.30)$$

по једначини

$$\mathbf{RS} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{D} \quad (2.31)$$

где су

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_1 & \cdots & \vdots & \vdots & b_1 & \cdots & \vdots \\ a_{n-1} & \vdots & \cdots & 0 & b_{n-1} & \vdots & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \\ 0 & 1 & \cdots & a_1 & 0 & b_n & \cdots & b_1 \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & a_{n-1} & 0 & \vdots & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}_{[2n \times 2n]} \quad (2.32)$$

Силвестрова матрица, а

$$\mathbf{D} = [d_0 \quad d_1 \quad \cdots \quad d_{2n-2} \quad d_{2n-1}]_{2n \times 1}^T \quad (2.33)$$

вектор коефицијената полинома $D(z)$.

Очигледно је да се множењем Силвестрове матрице са вектором \mathbf{RS} добија вектор \mathbf{D} , што је на неки начин решавање Диофантове једначине поређењем коефицијената уз исте степене комплексне променљиве z .

Силвестрова матрица мора бити несингуларна, а то је задовољено ако је детерминанта матрице \mathbf{S}

$$|\mathbf{S}| = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_1 & \cdots & \vdots & \vdots & b_1 & \cdots & \vdots \\ a_{n-1} & \vdots & \cdots & 0 & b_{n-1} & \vdots & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \\ 0 & 1 & \cdots & a_1 & 0 & b_n & \cdots & b_1 \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & a_{n-1} & 0 & \vdots & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

различита од нуле. Тај услов ће бити задовољен ако су $A(z)$ и $B(z)$ узајамно прости полиноми или другим речима ако ова два полинома немају заједничких

нула. Ово тврђење се може доказати развојем детерминанте $|\mathbf{S}|$. Ако факторишемо полиноме $A(z)$ и $B(z)$ на следећи начин:

$$A(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) \quad (2.35)$$

и

$$B(z) = b_n \cdot \prod_{i=1}^n (z - \mu_i) \quad (2.36)$$

тада се развојем детерминанте добија следећа једнакост

$$|\mathbf{S}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (b_n)^n \cdot \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\lambda_i - \mu_j). \quad (2.37)$$

Очигледно је да је детерминанта Силвестрове матрице различита од нуле ако је задовољена неједнакост

$$\lambda_i - \mu_j \neq 0, \quad \forall (i, j) \in [1, n]. \quad (2.38)$$

Неједнакост (2.38) је задовољена ако полиноми $A(z)$ и $B(z)$ немају заједничких нула, па је тврђење да је Силвестрова матрица несингуларна, тачно.

На основу горе изведених једнакости може се рећи да је одређено једно од решења за полиноме $R_0(z)$ и $S_0(z)$. Ово су решења минималног степена. Остала решења се могу добити по следећим једнакостима

$$R(z) = R_0(z) + Q(z) \cdot B(z) \quad (2.39)$$

и

$$S(z) = S_0(z) - Q(z) \cdot A(z), \quad (2.40)$$

где је $Q(z)$ произвољан полином. Очигледно је да ако постоји решење $R_0(z)$ и $S_0(z)$, постоји и бесконачно много решења. Сва решења дају исту функцију преноса система са затвореном повратном спрегом, али не могу сва решења

задовољити остале законе управљања. Посматрајући једначине (2.39) и (2.40) може се закључити да постоји јединствено решење једначине (2.29) такво да је

$$\deg R(z) < \deg B(z) \quad (2.41)$$

или

$$\deg S(z) < \deg A(z). \quad (2.42)$$

2.3.2. Решење полиномне Диофантове једначине Еуклидовим алгоритмом

Један од често примењиваних начина решавања Диофантове једначине је Еуклидов алгоритам. То је алгоритам који се заснива на тражењу највећег заједничког делиоца два броја. Овај алгоритам се успешно може применити и на два полинома, на тај начин што ће се рецимо за полиноме $A(z)$ и $B(z)$ наћи полином $C(z)$ који је највећи заједнички делилац ова два полинома. Да би примена Еуклидовога алгоритма на полиноме била јаснија и прегледнија, прво ћемо применити овај алгоритам на налажење највећег заједничког делиоца два цела броја a и b . Под претпоставком да је апсолутна вредност броја a већа од апсолутне вредности броја b тада се може написати следећа једнакост

$$a = b \cdot q + r. \quad (2.43)$$

Ако је број u највећи заједнички делилац бројева a и b тада је он истовремено и делилац броја r . Ова тврдња је очигледна из следеће једнакости

$$r = a - b \cdot q = s \cdot u - t \cdot u \cdot q = (s - t \cdot q) \cdot u \quad (2.44)$$

Пошто је сваки заједнички делилац бројева a и b , делилац бројева b и r тада се за налажење највећег заједничког делиоца бројева a и b може применити следећа процедура:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \quad a = b \cdot q_1 + r_1 \quad r_1 = a - b \cdot q_1, \quad (2.45)$$

где је $\lfloor x \rfloor$ највећи цео број мањи или једнак реалном броју x ,

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \left[\frac{b}{r_1} \right] & b &= q_2 \cdot r_1 + r_2 & r_2 &= b - q_2 \cdot r_1, \\
 q_3 &= \left[\frac{r_1}{r_2} \right] & r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3 & r_3 &= r_1 - q_3 \cdot r_2, \\
 & & & & & \vdots \\
 q_n &= \left[\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right] & r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1} + r_n & r_n &= r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-1}, \\
 q_{n+1} &= \left[\frac{r_{n-1}}{r_n} \right] & r_{n-1} &= q_{n+1} \cdot r_n + 0 & r_n &= \frac{r_{n-1}}{q_{n+1}}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Након егзактног дељења бројева у последњој једначини (2.46) закључујемо да је највећи заједнички делилац бројева a и b , број $u = r_n$.

Еуклидов алгоритам је сада једноставно применити на решавање Диофантове једначине

$$a \cdot x + b \cdot y = c. \tag{2.47}$$

Претходно је потребно решити једначину

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 1, \tag{2.48}$$

па ће се решење једначине (2.47) лако добити на основу следеће једначине

$$x = x_0 \cdot c \text{ и } y = y_0 \cdot c. \tag{2.49}$$

Да би се решила Диофантова једначина (2.48) може се искористити варијација Еуклидовога алгоритма на следећи начин:

Усвајамо да је $a = r_1$ и $b = r_2$, тада је

$$\begin{aligned}
 r_1 &= q_1 \cdot r_2 + r_3 \\
 r_2 &= q_2 \cdot r_3 + r_4 \\
 &\vdots \\
 r_{n-3} &= q_{n-3} \cdot r_{n-2} + r_{n-1} \\
 r_{n-2} &= q_{n-2} \cdot r_{n-1} + 1.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Стартујући од последње једначине у (2.50) може се написати следећа једнакост

$$1 = r_{n-2} - q_{n-2} \cdot r_{n-1} \tag{2.51}$$

а затим

$$r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-3} \cdot r_{n-2}. \quad (2.52)$$

Заменом (2.52) у (2.51) и сређивањем десне стране једнакости добија се следећа једнакост

$$1 = -q_{n-2} \cdot r_{n-3} + (1 - q_{n-2} \cdot q_{n-3}) \cdot r_{n-2}. \quad (2.53)$$

Наставком процедуре долази се до прве једначине у (2.50) при чему се добијају решења једначине (2.48).

Алгоритам је једноставније схватити на бројном примеру

$$1027 \cdot x + 712 \cdot y = 1.$$

Применом једначине (2.50) добија се

$$\begin{aligned} 1027 &= 712 \cdot 1 + 315, \\ 712 &= 315 \cdot 2 + 82, \\ 315 &= 82 \cdot 3 + 69, \\ 82 &= 69 \cdot 1 + 13, \\ 69 &= 13 \cdot 5 + 4, \\ 13 &= 4 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

Сада се на претходни резултат могу применити једначине (2.51) и (2.53) чиме се добија следећи низ једнакости

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1, \\ 1 &= 1 \cdot 13 - 3 \cdot 4, \\ 1 &= -3 \cdot 69 + 16 \cdot 13, \\ 1 &= 16 \cdot 82 - 19 \cdot 69, \\ 1 &= -19 \cdot 315 + 73 \cdot 82, \\ 1 &= 73 \cdot 712 - 165 \cdot 315, \\ 1 &= -165 \cdot 1027 + 238 \cdot 712. \end{aligned}$$

На основу последње једнакости може се закључити да је решење Диофантове једначине

$$1027 \cdot x_0 + 712 \cdot y_0 = 1 \quad x_0 = -165 \text{ и } y_0 = 238.$$

Сада ћемо применити Еуклидов алгоритам на полиномну једначину (2.29). Прво се усваја да је $R_1(z) = A(z)$ и $R_2(z) = B(z)$, па се затим може написати следећи низ једнакости

$$\begin{aligned}
 R_1(z) &= Q_1(z) \cdot R_2(z) + R_3(z) \\
 R_2(z) &= Q_2(z) \cdot R_3(z) + R_4(z) \\
 &\vdots \\
 R_{n-2}(z) &= Q_n(z) \cdot R_{n-1}(z) + R_n(z) \\
 R_{n-1}(z) &= Q_{n+1}(z) \cdot R_n(z) + R_{n+1}(z) \\
 R_{n+1}(z) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

На основу једначине (2.54) може се закључити да је највећи заједнички делилац полинома $A(z)$ и $B(z)$ полином $R_n(z)$. С обзиром на то да полиноми $A(z)$ и $B(z)$ немају заједничких фактора тада је полином $R_n(z)$, идентички једнак јединици

$$R_n(z) = 1. \tag{2.55}$$

Из једначине (2.54) може се написати следећа једнакост

$$1 = R_n(z) = R_{n-2}(z) - Q_n(z) \cdot R_{n-1}(z) \tag{2.56}$$

а затим

$$R_{n-1}(z) = R_{n-3}(z) - Q_{n-1}(z) \cdot R_{n-2}(z). \tag{2.57}$$

Заменом (2.57) у (2.56) добија се

$$\begin{aligned}
 1 &= -Q_n(z) \cdot R_{n-3}(z) + (1 + Q_n(z) \cdot Q_{n-1}(z)) \cdot R_{n-2}(z) \\
 &= U_{n-3}(z) \cdot R_{n-3}(z) + V_{n-2}(z) \cdot R_{n-2}(z).
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Настављајући аналогно једначини (2.58) долази се до крајње једнакости

$$1 = U_1(z) \cdot R_1(z) + V_2(z) \cdot R_2(z) = U_1(z) \cdot A(z) + V_2(z) \cdot B(z), \tag{2.59}$$

и на основу тога се може рећи да је решење полиномне Диофантове једначине (2.29) представљено у следећем облику

$$R(z) = U_1(z) \cdot D(z) \tag{2.60}$$

и

$$S(z) = V_2(z) \cdot D(z). \quad (2.61)$$

2.4. Каузалност

Закон управљања (2.3) је каузалан ако су задовољене неједнакости (2.4). На основу ових тврђења може се закључити да је *pole placement* каузалан ако су задовољене следеће неједнакости:

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B \quad (2.62)$$

и

$$\deg A_0 \geq 2 \cdot \deg A - \deg A_m - \deg B^+ - 1. \quad (2.63)$$

На основу једначине (2.20) и неједнакости $\deg S(z) \leq \deg R(z)$ и $\deg B(z) \leq \deg A(z)$ следи да је

$$\deg A(z) \cdot R(z) = \deg B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z).$$

Значи, да би се задовољила једначина (2.20) степен полинома $R(z)$ мора задовољити следећу једнакост

$$\deg R(z) = \deg A_o(z) + \deg A_m(z) + \deg B^+(z) - \deg A(z).$$

Из једначине (2.19) се може одредити степен полинома $T(z)$ као

$$\deg T(z) = \deg A_o(z) + \deg B_m'(z).$$

Сада се могу проучити последице неједнакости (2.4), по којој је

$$\deg A_o(z) + \deg A_m(z) + \deg B^+(z) - \deg A(z) \geq \deg A_o(z) + \deg B_m'(z).$$

Сређивањем израза добија се

$$\deg A_m(z) - \deg B_m'(z) \geq \deg A(z) - \deg B^+(z).$$

Одузимањем $\deg B^+(z)$ од обе стране неједначине добија се неједначина (2.62). Избором степена полинома $S(z)$ таквог да буде задовољена једнакост

$$\deg S(z) = \deg A(z) - 1$$

и неједнакост (2.4) може се написати у облику

$$\deg A_o(z) + \deg A_m(z) + \deg B^+(z) - \deg A(z) \geq \deg A(z) - 1.$$

Сређивањем израза добија се неједнакост (2.63), која је битна код одређивања степена полинома опсервера $\deg A_o(z)$ због каузалности закона управљања. Неједначина (2.62) нам јасно говори да кашњење система са затвореном повратном спрегом мора бити исто тако велико као кашњење у процесу.

2.5. Оселљивост на грешке при моделовању процеса

Иако је теорија континуалних и дигиталних система толико развијена, у смислу представљања динамике система математичким моделом погодним за проучавање понашања ситема, не може се са сигурношћу тврдити да је функција дискретног преноса окарактерисана као однос два полинома по комплексној променљивој z са реалним коефицијентима, тачна. Може се рећи да је наша функција дискретног преноса довољно тачна или нетачна или другим речима адекватна за проблематику којом се бавимо у моделовању процеса. При дискретизацији континуалних система са исувише малом периодом одабирања Никвистово подручје учестаности је врло широко, па унутар тако великог подручја учестаности може доћи до изражаја немоделирана динамика анализираних реалних система или, кад је реч о дигиталној обради сигнала, повећан утицај суперпонираног шума на вредности одбирака[3]. Због тога је веома важно разумети како грешке у моделовању могу утицати на карактеристике система са затвореном повратном спрегом.

Уводи се претпоставка да је процедура дизајна дигиталног регулатора заснована на моделу

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (2.64)$$

док је истинит модел

$$H^o(z) = \frac{B^o(z)}{A^o(z)}. \quad (2.65)$$

За дату структуру дигиталног регулатора за систем са затвореном повратном спрегом се може рећи да је стабилан у односу на $H^o(z)$, ако је

$$\left| H(z) - H^o(z) \right| < \left| \frac{H(z) \cdot T(z)}{H_m(z) \cdot S(z)} \right| = \left| \frac{H(z)}{H_m(z)} \right| \cdot \left| \frac{H_{ff}(z)}{H_{fb}(z)} \right| \text{ за } |z|=1, \quad (2.66)$$

где су

$$H_{ff}(z) = \frac{T(z)}{R(z)} \quad (2.67)$$

дискретна *feedforward* и

$$H_{fb}(z) = \frac{S(z)}{R(z)} \quad (2.68)$$

feedback функција дискретног преноса.

Неједначина (2.66) није лако уочљива, али је није тешко извести ако се позовемо на резултате опште осетљивости. Као што се може приметити ми смо грешку у функцији дискретног преноса ограничили са горње стране по апсолутној вредности, изразом који у себи не садржи тачну функцију дискретног преноса система $H^o(z)$. Пошто је израз за кружно појачање

$$H_{lg}(z) = \frac{B(z) \cdot S(z)}{A(z) \cdot R(z)},$$

тада следи да је

$$1 + H_{lg}(z) = 1 + \frac{B(z) \cdot S(z)}{A(z) \cdot R(z)} = \frac{B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z)}{A(z) \cdot R(z)}.$$

Пошто је

$$A_o(z) = \frac{T(z) \cdot B^-(z)}{B_m(z)},$$

тада је

$$1 + H_{lg}(z) = \frac{B^+(z) \cdot B^-(z) \cdot T(z) \cdot A_m(z)}{A(z) \cdot R(z)} = \frac{B(z) \cdot A_m(z) \cdot T(z)}{A(z) \cdot B_m(z) \cdot R(z)}.$$

Са обзиром на једнакости (2.1) и (2.2), може се написати да је

$$1 + H_{lg}(z) = \frac{H(z) \cdot T(z)}{H_m(z) \cdot R(z)}.$$

Ако израз (2.66) помножимо са $S(z)/R(z)$, добија се нови израз

$$\left| \frac{S(z)}{R(z)} \cdot H(z) - \frac{S(z)}{R(z)} \cdot H^o(z) \right| < \left| \frac{H(z) \cdot T(z)}{H_m(z) \cdot R(z)} \right| = |1 + H_{lg}(z)|$$

или

$$|H_{lg}(z) - H^o(z)| < |1 + H_{lg}(z)|.$$

Резултат сада следи из теореме о стабилности система са затвореном повратном спрегом [1]. Посматрајмо систем са затвореном повратном спрегом $H_m(z)$ добијен помоћу негативне повратне спреге излаза процеса описаног функцијом дискретног преноса $H(z)$ у једном и $H^o(z)$ у другом случају. Систем са затвореном повратном спрегом који у себе укључује $H^o(z)$ је стабилан ако су испуњени следећи услови:

- Систем $H_m(z)$ је стабилан
- $H(z)$ и $H^o(z)$ имају исти број полова изван јединичног диска
- Неједнакост

$$|H^o(z) - H(z)| < |1 + H(z)| \quad (2.69)$$

је испуњена за $|z| = 1$.

Последња неједнакост следи из принципа варијације аргумента где се изводи закључак да је разлика броја полова и нула изван јединичног круга за $1+H(z)$ и $1+H^o(z)$ једнака [1].

Из ове теореме се може закључити да је веома важно знати број нестабилних полова или нула процеса због правилног пројектовања дигиталног регулатора. Осим тога, неједначина (2.69) дефинише област учестаности у којој се захтева релативно висока тачност усвојеног модела процеса. Посебно висока тачност моделовања је неопходна управо на учестаностима при којима је $H^o(z) \approx -1$, али не и на учестаностима при којима је појачање система велико.

Када се заврши процедура дизајна регулатора, десна страна једнакости (2.66) се лако рачуна за $z = e^{j\omega T}$, и она не зависи од функције дискретног преноса процеса $H^o(z)$. Захтеви за прецизношћу модела се могу представити у функцији учестаности. Може се приметити да је неједнакост (2.66) аутоматски задовољена ако је испуњен услов

$$\left| H_{\text{lg}}(z) \right| = \left| \frac{S(z) \cdot B(z)}{R(z) \cdot A(z)} \right| < \frac{1}{3} \text{ и } \left| H_{\text{lg}}^o(z) \right| = \left| \frac{S(z) \cdot B^o(z)}{R(z) \cdot A^o(z)} \right| < \frac{1}{3}. \quad (2.70)$$

Тада је довољно неједнакост (2.66) проверавати за учестаности при којима је појачање кружне петље веће од 1/3.

Може се дефинисати и релативна тачност моделовања

$$\frac{|H(z) - H^o(z)|}{|H(z)|} \leq \frac{1}{|H_m(z)|} \cdot \left| \frac{H_{\text{ff}}(z)}{H_{\text{fb}}(z)} \right|. \quad (2.71)$$

Неједначина (2.64) поред математичког има јасан и физички смисао. Обично је функција дискретног преноса $H(z)$ велика на ниским учестаностима, са тенденцијом опадања на вишим учестаностима. У исто време, жељена функција дискретног преноса система са затвореном повратном спрегом $H_m(z)$, је по правилу на ниским учестаностима једнака јединици. Близу тачке пресека са кривом $H(z)$, функција $H_m(z)$ поседује слабо изражен максимум, а са даљим порастом учестаности функција $H_m(z)$ опада. Однос $H(z)/H_m(z)$ је релативно лако формирати користећи се њиховим Бодеовим карактеристикама. Висока тачност модела је неопходна само у одређеном фреквенцијском опсегу. При томе је могућа и процена промене пропусног опсега пројектованог система. Тиме се жели рећи да захтеви за тачношћу модела могу бити смањени, смањивањем пропусног опсега система са затвореном повратном спрегом, односно тачност модела мора бити много већа са повећањем пропусног опсега система. Количник

$$\left| \frac{H_{\text{ff}}(z)}{H_{\text{fb}}(z)} \right| = \left| \frac{T(z)}{S(z)} \right|,$$

тј. количник *feedforward* и *feedback* функција дискретног преноса је једнак јединици при пројектовању закона управљања по променљивој сигнала

грешке. На фреквенцијама на којима је *feedforward* појачање веће од *feedback* појачања, захтеви за тачношћу модела су мањи. На крају се може закључити и да је тачност апроксимације функције дискретног преноса система са затвореном повратном спрегом такође условљена грешкама моделовања. Већа тачност се постиже у условима релативно великих вредности функција $H(z)$ и $H^o(z)$.

Поред поменутих услова које треба да задовољавају полиноми дигиталног регулатора (динамика система са затвореном повратном спрегом и унутрашња стабилност система), од многобројних решења Диофантове једначине узећемо она која нам задовољавају неједнакост (2.66).

2.6. Осетљивост на шум мерења и поремећај оптерећења

Сагласно слици 2.1 може се написати следећа једнакост

$$\begin{aligned} x &= \frac{B(z) \cdot (T(z) \cdot u_c + R(z) \cdot v - S(z) \cdot e)}{A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)} \\ &= \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \cdot u_c + \frac{H_{lg}(z)}{1 + H_{lg}(z)} \cdot \frac{1}{H_{lg}(z)} \cdot v - \frac{H_{lg}(z)}{1 + H_{lg}(z)} \cdot e. \end{aligned} \quad (2.72a)$$

Ова једначина се може написати, сагласно једначинама (2.14), (2.15) и (2.20), у следећем облику

$$x = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} u_c + \frac{B(z) \cdot R^-(z)}{A_m(z) \cdot A_o(z)} v - \frac{B^-(z) \cdot S(z)}{A_m(z) \cdot A_o(z)} e. \quad (2.72b)$$

Може се уочити велика сличност у функцијама дискретног преноса које повезују излаз процеса x са командним сигналом u_c , сигналом поремећаја v и сигналом шума мерења e . Разлика се огледа у присуству полинома $T(z)$, $R(z)$ и $S(z)$ у бројиоцима одговарајућих функција дискретног преноса. Из (2.72) се може закључити да је у систему са јединичним појачањем могуће присуство грешака мерења ниске учестаности. Ове грешке се појављују при мерењу излазног сигнала y , а повратном спрегом се врши њихов утицај на излаз процеса x . Присуство грешака мерења високе фреквенције је занемарљиво, због тога што се пригушују динамиком дигиталног регулатора. Из (2.72) следи да се пренос сигнала може блокирати на неким учестаностима на којима је $S(z)$ релативно мало. На пример *notch* филтер се добија ако је полином

$$Q(z) = z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega T) + 1, \quad (2.73)$$

фактор полинома $S(z)$. Осим тога из (2.72) се може закључити да се споропроменљиви поремећај ефикасно може пригушити на учестаностима на којима је појачање повратне спреге $H_{fb}(z)$ велико или вредност полинома $R(z)$ мала. Елиминација грешке стационарног стања на константан поремећај оптерећења је избор $R(1)=0$, што је еквивалентно дејству интегралног компензатора. За елиминацију поремећаја оптерећења на одређеној учестаности полином $Q(z)$ мора бити фактор од $R(z)$. Пропорционално дејство повратне спреге омогућава велику осетљивост система са затвореном повратном спрегом на дејство поремећаја оптерећења.

Када се укаже потреба за тим да полиноми $R(z)$ и $S(z)$ имају унапред дефинисане факторе, тада се степен полинома опсервера мора увећати. Избор полинома опсервера такође утиче на пренос сигнала зато што су полиноми $R(z)$ и $S(z)$ повезани са полиномом опсервера $A_o(z)$.

3. КОМПОНЕНТЕ БРЗИНСКОГ СЕРВО СИСТЕМА

3.1. Инвертор

Као актуатор електромагнетског момента у серво системима који користе машину наизменичне струје као извршни орган користи се струјно регулисани напонски инвертор. Инвертор генерише напон тако да статорске струје следе задате струјне референце добијене у алгоритму индиректне векторске контроле (IFOC) [2]. Ако је актуатор довољно брз, развијени електромагнетски моменат у машини једнак је захтеваном моменту.

У пракси, велику брзину одзива имају само актуатори са хистерезисним струјним регулатором у стационарном координатном систему. Због природе одзива хистерезисног регулатора, статорске струје следе задате струјне референце са струјном грешком која је ограничена ширином хистерезиса. Ако је ширина хистерезиса мала, онда је сасвим оправдано избећи детаљније моделовање и актуатор се може сматрати идеалним. Ипак, и поред супериорних карактеристика оваква конфигурација актуатора све се ређе користи. Наиме, употреба хистерезисног струјног регулатора има за последицу променљиву радну учестаност прекидача у инверторском мосту, која зависи од дубине модулације и еквивалентне индуктивности расипања [2].

Услед променљиве учестаности рада прекидача, комутације у инверторском мосту нису стационарне у оквиру периоде излазног напона. При раду са нестационарним комутацијама, излазни напон инвертора садржи хармонике и субхармонике из широког опсега учестаности, па су електромагнетске сметње и бука јако изражени код ове топологије актуатора.

Зависност радне учестаности од еквивалентне индуктивности расипања мотора озбиљан је недостатак који може имати и нежељене последице. Наиме, ако је дужина напојног вода од инвертора до електричне машине већа од пројектоване, долази до смањења еквивалентне реактансе расипања услед паразитивне капацитивности напојног вода. Смањење еквивалентне реактансе расипања има за последицу повећање радне учестаности и стога веће загревање енергетских транзистора. У крајњем случају, услед велике дисипације снаге може доћи и до прегоривања енергетских транзистора.

3.1.1. PWM инвертор са линеарним струјним регулатором

Проблеми везани за променљиву учестаност рада прекидача у инверторском мосту актуатора са хистерезисним струјним регулатором успешно се отклањају ако се за уобличавање статорских струја користи струјно вођени PWM инвертор. Подсетимо, технике PWM модулације користе носилац константне учестаности за поређење са референтним таласним обликом. На овај начин, таласни облици излазних напона и струја инвертора доминантно садрже више хармонике на учестаности ширинске модулације. У пракси, са брзим прекидачима снаге могуће је остварити учестаности PWM модулације које се налазе и изван границе аудио опсега. Осим тога, константном учестаношћу рада разрешава се и проблем синхронизације прекидача у инверторском мосту.

У конфигурацији актуатора са PWM инвертором, за регулацију струје се користи линеарни струјни регулатор у синхронном координатном систему. У синхронном координатном систему, променљиве напона и струје узимају једносмерне вредности па је употребом линеарног струјног регулатора могуће остварити регулацију без статичке грешке. Регулација статорских струја без статичке грешке од пресудног је значаја за тачност рада алгоритама векторске контроле.

Струјне референце I_d^* и I_q^* добијају се у алгоритму индиректне векторске контроле процесирањем референци момента T^* и флуksа Ψ^* . Конвенционални PI (пропорционално - интегрални) закон управљања употребљен је за добијање *feed-forward* напонских референци U_d^* и U_q^* . Трансформацијом напонских референци U_d^* и U_q^* из синхроног у стационарни координатни систем добијају се напонске референце U_a^* , U_b^* и U_c^* . Као аргумент Блонделове обртне трансформације користи се угао θ_e . Тренутни положај синхроног d - q координатног система θ_e одређује се на основу тренутног положаја ротора θ_r и процењене вредности угла клизања θ_k . Напонске референце U_a^* , U_b^* и U_c^* се затим пореде са троугластим носиоцем како би се добили импулси за паљење прекидача у инверторском мосту. Да бисмо затворили контуре струјне регулације по d и q осама, статорске струје треба измерити и унети у дигитални контролер. У пракси, због електромагнетског шума енергетике, одбирци α и β компоненте статорске струје добијају се применом интегралне методе. За реализацију ове методе мерења потребан је систем од два напонски контролисана осцилатора (VCO) и два бројача. Овде се аналогни напони пропорционални α и β компонентама статорске струје доводе на улазе VCO конвертора. VCO конвертори генеришу импулсе који служе као такт за пуњење бројача. Како је учестаност ових

импулса пропорционална вредностима сигнала на улазу у VCO конверторе, при сваком читавању у бројачима ће се налазити вредности које су пропорционалне ампер - секундама струја које се мере. Одбирци α и β компоненте статорске струје добијају се као диференца садржаја ових бројача. Примена линеарног закона управљања у регулацији статорских струја за собом повлачи извесна ограничења у погледу динамике одзива актуатора. Наиме, за усвојену периоду ширинске модулације T_{pwm} , периода одабирања струјног регулатора T_{cr} може узимати неку од вредности из скупа $T_{cr} = kT_{pwm}$, ($k = 1, 2, 3, \dots$). Мање вредности немају смисла јер на струју статора не можемо да утичемо чешће него што то инвертор чини. Узмимо најповољнији случај, односно да је $T_{cr} = T_{pwm}$. Очигледно, периода одабирања струјног регулатора је ограничена и зависи од избора прекидача у инвертору. У случају линеарног струјног регулатора, одзив на струјну грешку није тренутан, већ се одвија по експоненцијалном закону са динамиком која је функција пропусног опсега. Како је пропусни опсег линеарног струјног регулатора ограничен за дату периоду одабирања, тешко је говорити о "идеалном" актуатору већ је сасвим извесно да су његове перформансе коначне.

3.1.2. Моделовање актуатора

Да бисмо стекли увид у перформансе актуатора са линеарним струјним регулатором, неопходно је најпре формирати његов динамички модел. Типично, флуks у електричној машини је константан па се захтевани електромагнетски моменат остварује манипулацијом попречне компоненте статорске струје. У том случају, модел актуатора своди се на модел контуре струјне регулације за q -осу.

Транспортна кашњења су последица одлагања у инвертору и процесору. Наиме, због природе ширинске модулације (усредњавање), излазни напон инвертора касни за половину периоде PWM модулације у односу на референтни таласни облик напона на улазу. Како смо усвојили да је $T_{cr} = T_{pwm}$, одлагање у инвертору моделовано је транспортним кашњењем $T_{cr}/2$. Израчунавања у процесору су комплексна због обртне трансформације тако да се управљачки сигнали примењују тек у наредној периоди одабирања. Ово одлагање моделовано је транспортним кашњењем T_{cr} . Такође, претпоставља се да је поремећај у виду индуковане електромоторне силе статора споропроменљив у односу на динамику одзива струјног регулатора. У том случају, конвенционални PI регулатор омогућиће праћење референтног улаза без статичке грешке.

Параметре PI регулатора лако можемо подесити ако претходно транспортна кашњења у инвертору и процесору моделујемо одговарајућим

временским кашњењима првог реда. За мале вредности периоде одабирања T_{cr} можемо узети да је

$$\exp(-sT_{cr}) \approx \frac{1}{1+sT_{cr}} \quad (3.1)$$

односно,

$$\exp\left(-s\frac{T_{cr}}{2}\right) \approx \frac{1}{1+s\frac{T_{cr}}{2}}. \quad (3.2)$$

У том случају, транспортна кашњења у инвертору и процесору можемо моделовати еквивалентним временским кашњењем првог реда

$$W_d(s) = \frac{1}{1+sT_d}, \quad (3.3)$$

где је T_d , доминантна временска константа.

Доминантна временска константа. Посматрајмо функцију континуалног преноса са n реалних полова облика

$$W_n(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+s\tau_i)}. \quad (3.4)$$

Потребно је дакле наћи учестаност $\omega_d = 1/\tau_d$ при којој функција континуалног преноса (3.4) има слабљење 3 dB. Овај захтев може се исказати једначином

$$\left| \prod_{i=1}^n (1+s\tau_i) \right| = \sqrt{2}. \quad (3.5)$$

Случај $n = 2$: Из једначине (3.5) добијамо

$$\left| 1 - \omega^2 \tau_1 \tau_2 + j\omega(\tau_1 + \tau_2) \right| = \sqrt{2}, \quad (3.6)$$

одакле закључујемо да је доминантна временска константа дата изразом

$$\omega_d^2 = \frac{1}{\tau_d^2} = \frac{-(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \sqrt{\tau_1^4 + \tau_2^4 + 6 \cdot \tau_1^2 \cdot \tau_2^2}}{2 \cdot \tau_1^2 \cdot \tau_2^2} \quad (3.7)$$

Ако усвојимо претпоставку да је производ временских константи τ_1 и τ_2 много пута мањи од збира истих, тада се може написати следећа једнакост

$$\omega_d = \lim_{\tau_1 \cdot \tau_2 \rightarrow 0} \frac{-(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \sqrt{\tau_1^4 + \tau_2^4 + 6 \cdot \tau_1^2 \cdot \tau_2^2}}{2 \cdot \tau_1^2 \cdot \tau_2^2} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}} \quad (3.8)$$

Случај $n = 3$: Из једначине (3.5) добијамо

$$\left|1 - \omega^2(\tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 + \tau_2\tau_3) + j\omega(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)\right| = \sqrt{2}, \quad (3.9)$$

одакле закључујемо да је доминантна временска константа дата изразом

$$\omega_d = \frac{1}{\tau_d} \approx \frac{1}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}}. \quad (3.10)$$

Може се показати да је доминантна временска константа у случају функције континуалног преноса са n реалних полова дата изразом

$$\omega_d = \frac{1}{\tau_d} \approx \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \tau_i^2}}. \quad (3.11)$$

Дакле, функцију континуалног преноса са n реалних полова можемо моделовати еквивалентним временским кашњењем првог реда

$$W_1(s) = \frac{1}{1 + s\tau_d}, \quad (3.12)$$

где је τ_d доминантна временска константа дата изразом (3.11).

Доминантну временску константу T_d којом моделујемо транспортна кашњења у контури струјне регулације сада је лако одредити. Применом израза (3.8) за случај функција преноса (3.1) и (3.2) добијамо

$$T_d = \sqrt{T_{cr}^2 + (T_{cr}/2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} T_{cr}. \quad (3.13)$$

С обзиром да су добијени полови реални и једнаки, пропусни опсег актуатора може се проценити на основу израза

$$f_{bw}^{cr} [Hz] = \frac{1}{2\pi T_{cr}} \ln \frac{1}{\sigma_{opt}^{cr}} = \frac{0.0396}{T_{cr} [s]}. \quad (3.14)$$

У реалним системима, у зависности од типа употребљених прекидача у мосту инвертора могуће је остварити учестаности ширинске модулације од 5 kHz до 15 kHz. Заменом ових вредности у израз (3.14) уз услов да је $T_{cr} = T_{pwm}$

добивамо да пропусни опсег актуатора са PI регулатором струје и PWM инвертором узима вредности из опсега 198 Hz до 594 Hz.

Очигледно, пропусни опсег актуатора са линеарним струјним регулатором је коначан и мора се узети у обзир приликом оптимизације линеарног режима надређене брзинске петље. Из тог разлога, актуатор треба моделовати временским кашњењем првог реда

$$W_{em}(s) = \frac{1}{1 + \tau_{em}s}, \quad (3.15)$$

где је τ_{em} доминантна временска константа актуатора.

Доминантну временску константу актуатора τ_{em} можемо проценити на основу спектра полова контуре струјне регулације у z -равни. Применом израза (3.10) за случај троструког реалног пола у тачки σ_{opt} добијамо

$$\tau_{em}[s] = \frac{\sqrt{3}}{\ln \frac{1}{\sigma_{opt}}} T_{cr} = 6.95 \cdot T_{cr}[s]. \quad (3.16)$$

Израз (3.16) показује да постоји линеарна зависност између брзине одзива актуатора и периоде одабирања регулатора струје односно учестаности PWM модулације. У општем случају, доминантну временску константу актуатора могуће је проценити применом неке од метода за идентификацију параметара механичког подсистема.

3.2. Мерење позиције

Сервомеханизми високих перформанси захтевају даваче велике прецизности за мерење положаја осовине мотора. У пракси се најчешће користе два типа давача: оптички енкодери (апсолутни и инкрементални) и електромагнетни ризолвер.

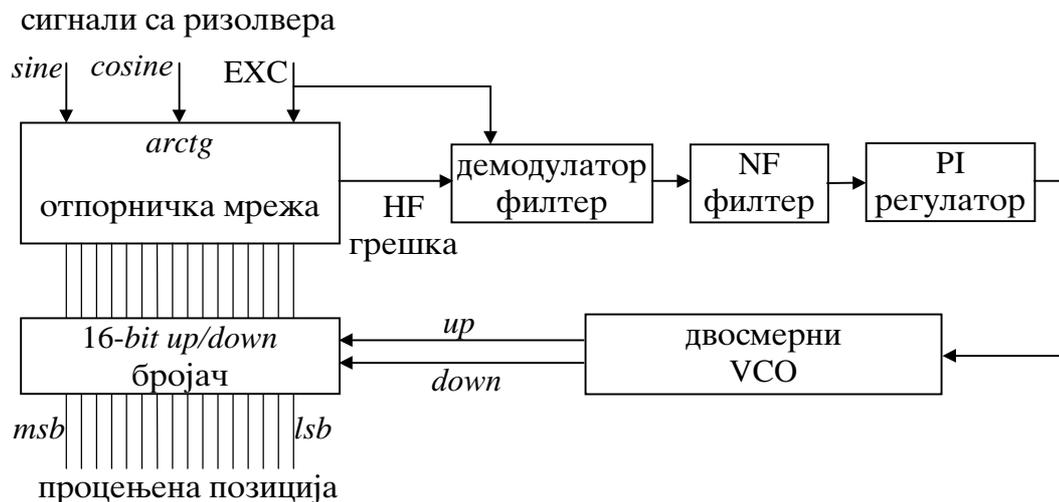
Код апсолутних оптичких енкодера, положај осовине мотора се добија непосредним читавањем кодоване позиције са диска. За кодовање се најчешће користи Грејов или бинарно циклични код у коме се кодоване вредности било која два суседна броја разликују само у једном биту. На тај начин, смањује се грешка у детекцији угла која може бити највише један прираштај детектоване величине. Детектована вредност се пре довођења у процесор мора превести из бинарно цикличног у обичан бинарни код.

Инкрементални оптички енкодер опремљен је прозачним диском на коме су густо нанети непрозрачни еквидистантни маркери. За читавање маркера користи се светлосни детектор. У току обртања диска, читач маркера генерише поворку импулса која пуни двосмерни бројач. Сваком импулсу инкременталног енкодера одговара прираштај угла од једног кванта. На овај начин, приликом сваког читавања, у бројачу се налази дигитални еквивалент инкремента позиције. Сабирањем сукцесивних вредности бројача добија се дигитални еквивалент положаја који се мери.

Предности инкременталног у односу апсолутни оптички енкодер су бројне па се он по правилу користи као давач у серво системима високих перформанси. Пре свега, за ову врсту енкодера не постоји ограничење у погледу брзине обртања диска. Резолуција мерења је знатно већа и ограничена је само ширином прозирних зазора на диску. Такође, импулси који стижу са енкодерских фаза могу се уз употребу *capture-compare* бројачког система у микроконтролеру употребити за реализацију различитих метода мерења брзине, чиме се додатно повећава резолуција мерења брзине. Ипак, и поред бројних позитивних особина, инкрементални енкодер као и остали оптички енкодери има и једну јако изражену слабост. Наиме, индустријско окружење давача, које често подразумева присуство уљних пара, прашине, маханичке вибрације и повишене температуре, онемогућава правилан рад инкременталног енкодера. У таквом окружењу, као давач редовно се користи робусни електромагнетни ризолвер са синхроконвертором.

3.2.1. Електромагнетни ризолвер са синхроконвертором

Електромагнетни ризолвер има форму електричне машине која укључује обртни трансформатор и детекциони комплет који чине *sine* и *cosine* детекциони намотаји. Приликом обртања осовине мотора, услед високофреквентне побуде на ротору (ЕХС) на детекционим намотајима се индукују аналогни напони *sine* и *cosine*. Амплитуде и фазе ових напона садрже информацију о положају осовине мотора. Применом рациометријске методе [11], у синхроконвертору се на основу *sine* и *cosine* сигнала добија естимована позиција у дигиталном облику. Естимована позиција се налази у двосмерном *up/down* бројачу (сл. 1) у форми дигиталне речи са 10, 12, 14 или 16-битном тачношћу.



Слика 1. Унутрашња структура синхроконвертора.

Отпорничка *arctg* мрежа на улазу је тако организована да се на њеном излазу појављује високофреквентни сигнал грешке (HF грешка). Ова грешка је пропорционална разлици између стварне и естимоване позиције која се у дигиталном облику налази у бројачу. Високофреквентни сигнал грешке се прво демодулише а затим пропушта кроз нископропусни филтер ради елиминисања високих учестаности. Добијени аналогни сигнал је пропорционалан разлици стварне и естимоване позиције, и као такав се уводи у *PI* регулатор. Сигнал добијен на излазу из регулатора води се на улаз бидирекционог напонски контролисаног осцилатора (*BVCO*). Импулси генерисани на излазу *BVCO* конвертора служе као такт за пуњење 16-битног бројача, чиме се обезбеђује корективно дејство које присиљава естимовану позицију да следи стварни положај осовине мотора. Треба истаћи да је

синхроконвертор непотпун као опсервер. Као што је познато, опсервер има два улаза; један командни и један улаз за корективно дејство. Како корективно дејство у форми убрзања недостаје, синхроконвертор уноси кашњење у сигнал повратне спреге.

3.2.2. Моделовање синхроконвертора

Према подацима призвођача [11], функција спрегнутог континуалног преноса синхроконвертора гласи

$$\frac{\theta_{out}(s_N)}{\theta_{in}} = \frac{14(1+s_N)}{(s_N+2.4)(s_N^2+3.4s_N+5.8)}, \quad (3.17)$$

где је, s_N , оператор Лапласове трансформације нормализован у односу на граничну учестаност пропусног опсега синхроконвертора f_{BW} [Hz],

$$s_N = \frac{2}{\pi} \frac{s}{f_{BW}}. \quad (3.18)$$

Гранична учестаност синхроконвертора f_{BW} подешава се избором елемената за програмирање овог кола и налази се у опсегу од 520 Hz до неколико kHz. За изабрану вредност пропусног опсега, за модел синхроконвертора усвајамо временско кашњење првог реда

$$W_{rd}(s) = \frac{1}{1+\tau_{rd}s}, \quad (3.19)$$

где је τ_{rd} доминантна временска константа синхроконвертора.

Доминантну временску константу синхроконвертора можемо проценити из израза (3.17) ако претходно елиминишемо коначну нулу а затим редукујемо степен полинома у имениоцу. Тако добијамо

$$\frac{\theta_{out}}{\theta_{in}}(s_N) \approx \frac{14}{(s_N+2.4)(3.4s_N+5.8)}. \quad (3.20)$$

Израз (3.20) може се преписати у облику

$$\frac{\theta_{out}}{\theta_{in}}(s_N) \approx \frac{14/13.92}{(\tau_{1n}s_N+1)(\tau_{2n}s_N+1)}, \quad (3.21)$$

где су $\tau_{1n} = 1/2.4$ и $\tau_{2n} = 3.4/5.8$, нормализоване временске константе.

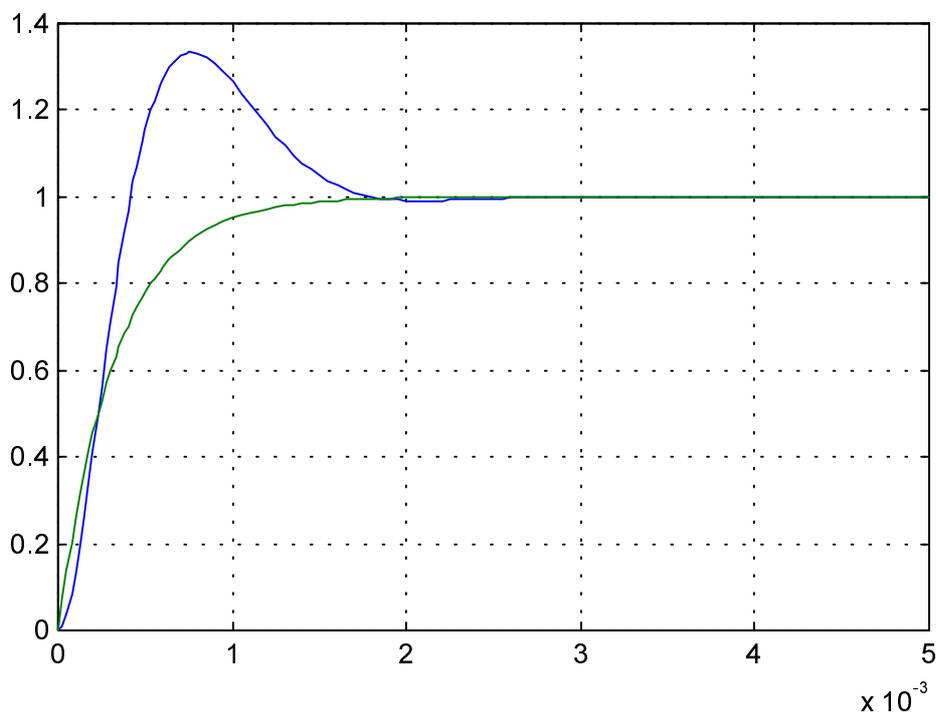
Применом израза (3.8), нормализована доминантна временска константа синхро-конвертора износи

$$\tau_{rdn} = \sqrt{\tau_{1n}^2 + \tau_{2n}^2} = 0.7192. \quad (3.22)$$

Коначно, применом израза (3.18), доминантна временска константа синхро-конвертора гласи

$$\tau_{rd}[\text{s}] = \tau_{rdn} \frac{2}{\pi \cdot f_{BW}[\text{Hz}]} = \frac{0.4578}{f_{BW}[\text{Hz}]} \quad (3.23)$$

Ефекат моделовања функције континуалног преноса (3.17) еквивалентним временским кашњењем првог реда илустрован је симулацијом на дигиталном рачунару за случај синхроконвертора пропусног опсега $f_{BW} = 1 \text{ kHz}$ и са другачијом еквиваленцијом, која је објашњена испод слике 2.



Слика 2. Одскочни одзиви синхроконвертора и еквивалентног кола првог реда

На основу симулације синхроконвертор се мења колом првог реда временске константе за коју ће то коло достићи 50 % референтне вредности као што га постиже и коло синхроконвертора. Закључује се да је та временска константа

$$\tau_{rd} = 330 \mu\text{s}.$$

3.2.3. Шум у сигналу повратне спреге

Осим кашњења, у сигналу повратне спреге брзинског серво система присутан је и квантизациони шум као последица ограничене резолуције синхроконвертора. Означимо са N -број бита бројача употребљених за мерење положаја осовине мотора. У том случају, резолуција мерења положаја износи $\Delta\theta$ [rad] = $2\pi/2^N$. У зависности од тога како добијамо процену брзине обртања вратила, сигнал процењене брзине биће мање или више контаминиран шумом. У случају најједноставнијег метода естимације - диференца положаја, резолуција мерења брзине износи

$$\Delta\omega[\text{rad/s}] = \frac{\Delta\theta}{T} = \frac{2\pi}{2^N T}, \quad (3.24)$$

где T означава периоду одабирања регулатора брзине.

3.3. МОДЕЛОВАЊЕ МЕХАНИЧКОГ ПОДСИСТЕМА

Механички подсистем у једном брзинском сервомеханизму представља ротор мотора наизменичне струје или круто повезан ротор мотора са обртним делом радне машине или оптерећења. Овакав механички подсистем може се еквивалентирати ротором са већим моментом инерције уз постојање отпорног момента најчешће зависног од брзине обртања [8]. Тако се једначина кретања своди на једнакост момента изазваног променом кинетичке енергије обртних маса са разликом електромагнетског момента и момента оптерећења. Оваква једначина важи у стационарним стањима или у споропроменљивим прелазним режимима.

У реалним системима, па и у брзинском сервомеханизму, ротор погонског мотора је повезан са оптерећењем преко еластичне осовине и спојнице, тј. елементима чија крутост није бесконачна. Приликом рада мотора долази до увртања осовине, па различити делови механичког подсистема имају различите брзине и убрзања. Ово има за последицу различите промене кинетичких енергија обртних маса, па долази до појаве осцилаторних момената који изазивају значајне разлике између електромагнетског и отпорног момента. Тренутне вредности ова два момента се разликују због момената насталих услед трења, као и момената у вратилу услед торзије тј. увртања осовине. Код мотора великих снага, у прелазним режимима која настају због наглих промена момента оптерећења или задавања нове референтне вредности брзине, коефицијенти торзије и трења постају нелинеарни, па тако утичу на велике промене разматраних момената и на тај начин изазивају лом осовине или спојних делова. Код мотора малих снага, ове коефицијенте сматраћемо линеарним, па евентуалне промене момената неће изазвати хаварију. Посебно значајан утицај код брзинских сервомеханизама има електромеханичка резонанција која настаје због поклапања фреквенције из електричног управљачког сигнала мотора са природном фреквенцијом механичког подсистема. Такође се може јавити и механичка резонанција када се фреквенција обртања изједначи са неком од природних механичких фреквенција.

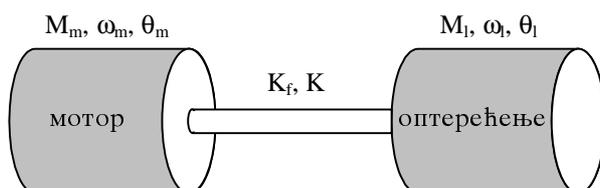
Електромеханичка резонанција се може спречити елиминисањем учестаности из управљачког сигнала која се поклапа са природном учестаношћу механичког подсистема. Елиминисање уског опсега учестаности из управљачког сигнала може се постићи правилним избором *notch* филтра. Идеалан *notch* филтар ће на датој учестаности имати бесконачно пригушење.

Идеалан *notch* филтар је немогуће реализовати, па се може постићи реална вредност пригушења на учестаности од интереса. У брзинским сервомеханизмима овај филтар је саставни део дигиталног регулатора. То значи да се може

имплементирати на дигиталном сигналном процесору. Из теорије дигиталних система управљања [3], познато је да се нека функција дискретног преноса може постићи различитим типовима реализације филтара *FIR* или филтра са коначним импулсним одзивом и *IIR* типа или филтра са бесконачним импулсним одзивом.

3.2.1. Математички модел механичког подсистема

Најчешћи случај у пракси представља мотор оптерећен оптерећењем спојеним са ротором мотора преко осовине и спојнице коначног коефицијента торзије. Механички подсистем је приказан на следећој слици



Слика 1. Механички подсистем мотор - оптерећење.

На основу слике могу се написати једначине које описују дати подсистем

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = M_{em} - K \left(\frac{d\theta_m}{dt} - \frac{d\theta_l}{dt} \right) - K_f (\theta_m - \theta_l) \quad (3.25)$$

$$J_l \frac{d^2\theta_l}{dt^2} = K_f (\theta_m - \theta_l) + K \left(\frac{d\theta_m}{dt} - \frac{d\theta_l}{dt} \right) - M_l \quad (3.26)$$

$$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt} \quad (3.27)$$

$$\omega_l = \frac{d\theta_l}{dt} \quad (3.28)$$

где су

J_m и J_l моменти инерције мотора и оптерећења респективно

K коефицијент фриkcије

K_f коефицијент крутости осовине

M_{em} електромагнетски моменат мотора

M_l механички моменат оптерећења

θ_m и θ_l позиције осовине на месту мотора и оптерећења респективно

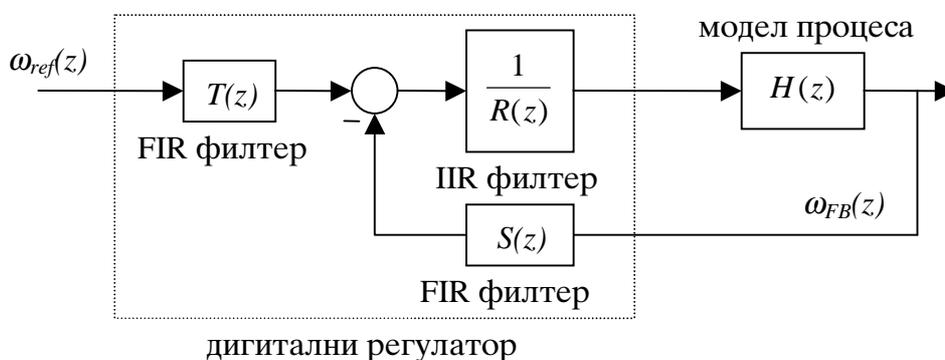
ω_m и ω_l угаоне брзине осовине на месту мотора и оптерећења респективно.

Решавањем датог система једначина може се извести функција преноса између позиције осовине мотора и електромагнетског момента. Постојање коефицијента фрикције K , омогућава да полови и нуле дате функције преноса имају реални део и на тај начин систем се неће налазити на граници стабилности. Дата функција преноса је

$$\frac{\theta_m}{M_{em}} = \frac{1}{(J_m + J_l)s^2} \frac{J_l s^2 + Ks + K_f}{\frac{J_l J_m}{J_l + J_m} s^2 + Ks + K_f}. \quad (3.29)$$

4. СИНТЕЗА ПОЛИНОМНОГ РЕГУЛАТОРА

У другом поглављу је дат детаљан приступ одређивању коефицијената полинома дигиталног регулатора. Као што се може закључити у датој процедури подешавања полова је потребно познавати функцију дискретног преноса процеса $H(z)$, функцију дискретног преноса система са затвореном повратном спрегом $H_m(z)$, полином опсервера $A_o(z)$, као и ред одговарајућих полинома $R(z)$ и $S(z)$. На основу усвојених степена полинома лако је формирати одговарајућу Диофантову једначину, чијим се решавањем добијају полиноми који учествују у синтези дигиталног регулатора. Наиме, синтеза дигиталног регулатора у било којој од предложених форми може се добити уз помоћ Диофантове једначине.



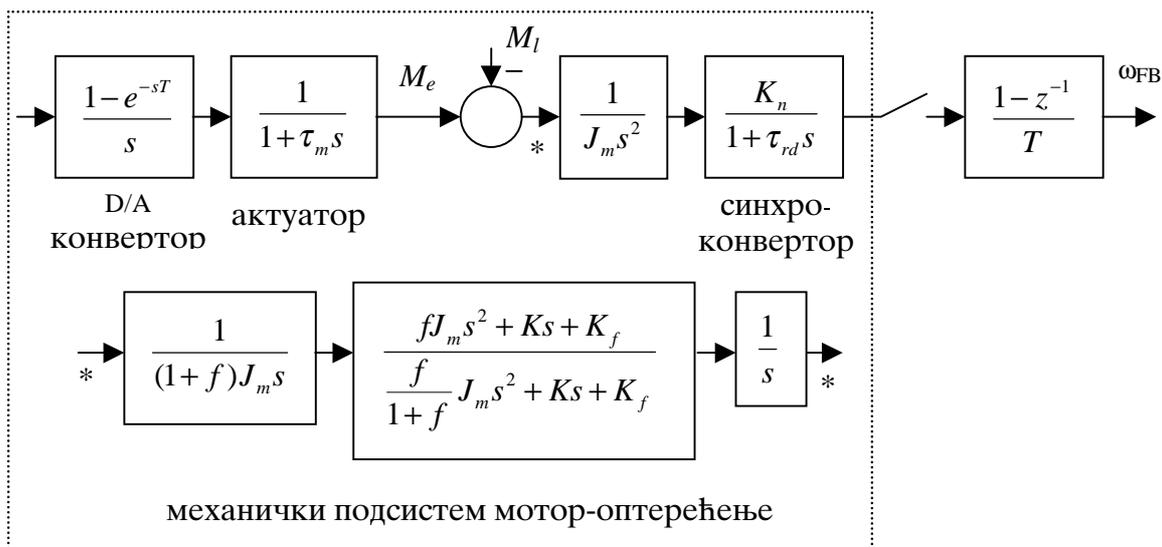
Слика 1. Систем са затвореном повратном спрегом

Процедура која се користи при израчунавању полинома дигиталног регулатора може се представити у неколико корака:

1. Дискретизација континуалног дела система процеса
2. Формирање функције дискретног преноса процеса $H(z)$
3. Одређивање нула процеса које се желе скратити
4. Формирање функције дискретног преноса система са затвореном повратном спрегом $H_m(z)$
5. Одређивање степена и форме полинома опсервера $A_o(z)$
6. Одређивање степена полинома $R(z)$ и $S(z)$
7. Решавање Диофантове једначине
8. Прорачун полинома $T(z)$
9. Провера интерне стабилности и робусности система
10. Провера одговарајућих динамичких карактеристика система уз помоћ симулације на рачунару

4.1 Дискретизација континуалног дела система процеса

Компоненте брзинског сервомеханизма су описане у трећем поглављу. На основу функција преноса које карактеришу поједине компоненте може се формирати функција преноса од команде електромагнетског момента па до измерене брзине вратила мотора која се добија као инкремент позиције. Континуални део система је приказан на следећој слици.



Слика 2. Континуални део система са диференцијатором позиције

Овде се мора дати једно кратко објашњење. На слици 2. се види блок реализован у дискретном домену који служи за израчунавање брзине помоћу инкрементирања мерене позиције вратила мотора. Овај блок може бити саставни део програмског кода заједно са дигиталним полиномним регулатором, а може се имплементирати и на програмском сегменту који није у оквиру дигиталног регулатора. Оваква модификација континуалног дела система је неопходна због природе дигиталног регулатора, који на улазима има референтну вредност брзине и процењену вредност брзине вратила мотора.

Нама у процедури подешавања полова треба функција дискретног преноса процеса $H(z)$. Она се неће добити дискретизацијом система на слици 2., већ се мора пре кола задршке нултог реда увести интегрално дејство. Разлог оваквој модификацији лежи управо у томе што се при практичној реализацији дигиталног регулатора на процесорима који имају дужину речи, рецимо 16 бита, интегрално дејство стапа са *IIR* филтром који се налази испред њега, и на тај начин може изгубити функцију коју треба да има. Његова функција је да у стационарном стању елиминише утицај споропроменљивог оптерећења, које у брзинском сервомеханизму има форму поремећаја. Значи наша функција дискретног преноса процеса $H(z)$ у себи садржи и интегрално дејство. На

основу свих ових објашњења може се формирати функција дискретног преноса процеса $H(z)$, која нам је у даљој синтези дигиталног регулатора неопходна. Пре тога потребно је нагласити да су се кашњења у актуатору и кашњења у синхроконвертору еквивалентирала једним кашњењем по следећој једнакости

$$d = \sqrt{\tau_{rd}^2 + \tau_m^2}. \quad (4.1)$$

Функција дискретног преноса процеса је

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot Z \left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{1+ds} \cdot \frac{1}{J_m s^2} \right\} \cdot \frac{1-z^{-1}}{T}. \quad (4.2)$$

Након сређивања израза (4.2) добија се

$$H(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}. \quad (4.3)$$

У случају када је мотор оптерећен тада се функција дискретног преноса $H(z)$ добија из следеће једнакости

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot Z \left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{1+ds} \cdot \frac{1}{(1+f)J_m s^2} \cdot \frac{fJ_m s^2 + Ks + K_f}{\frac{f}{1+f}J_m s^2 + Ks + K_f} \right\} \cdot \frac{1-z^{-1}}{T}. \quad (4.4)$$

Након сређивања израза (4.4) добија се

$$H(z) = \frac{b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}. \quad (4.5)$$

Због прегледности вредности коефицијената су дате у прилогу А. Генерализација решења методе подешавања полова је незахвална у симболичком рачуну за системе чији је ред већи од два, па се стога израчунавања изводе за конкретне бројне вредности променљивих у изразима (4.3) и (4.5). Посебну пажњу треба обратити на вредности нула функција дискретног преноса. Нуле које се налазе ван јединичног круга се не смеју скраћивати у процедури подешавања полова. Разлог лежи у томе што су оне нуле полинома $R(z)$, а то значи да су оне полови IIR филтра, који би у том случају лежали ван јединичног круга. На тај начин се нарушава стабилност система. Пошто се при синтези регулатора има довољно велики степен слободе (избор нула које се желе скратити, избор жељене функције преноса

система са затвореном повратном спрегом, избор полинома опсервера), тада се може рећи да је тешко наћи најоптималније решење дигиталног регулатора. У сваком случају могу се задовољити основни захтеви које треба да има један брзински сервомеханизам. На референтни сигнал типа одскочне функције систем треба да има апериодичан одзив или пригушено периодичан, са прескоком не већим од 20 %. Шум у електромагнетском моменту не треба да буде већи од 10 % номиналне вредности момента. Пропусни опсег система са затвореном повратном спрегом треба да се креће од 50-500 Hz.

У литератури [3] се на принципу оптимизације линеарног режима, пројектује дигитални регулатор PID типа, који има за задатак да у позиционом сервомеханизму оствари стриктно апериодичан одзив са што краћим временом смирења. То се може постићи минимизацијом збира одбирака сигнала грешке, које у овом случају не мењају знак. Као резултат такве оптимизације добијају се појачања регулатора, која у систему са затвореном повратном спрегом, чине да функција дискретног преноса има све полове реалне и једнаке. Јасно је да ће систем са половима на позитивном делу реалне осе имати најшири пропусни опсег. Што су полови ближи координатном почетку z -равни, то је брзина реаговања већа, тј. пропусни опсег система је већи.

Сходно претходном разматрању, иста логика се може применити и на брзински сервомеханизам. Ако желимо стриктно апериодичан одзив система са великим пропусним опсегом, изабраћемо функцију дискретног преноса са позитивним једнаким реалним половима. Систем у затвореној спрези не мора бити стабилан за произвољну вредност полова. Из раније дискусије види се да полови IIR филтра морају бити унутар јединичног круга. Па се стога пропусни опсег система не може повећавати до бесконачне вредности за усвојену форму дигиталног полиномног регулатора. Ако желимо још да повећамо пропусни опсег на учестаности полова за које смо се одлучили у претходном кораку изабраћемо пар коњуговано комплексних полова, који нам неће омогућити да у одзиву на одскочну функцију имамо пребачај већи од 20 %. Из свих наведених практичних аспеката може се изабрати функција дискретног преноса система са затвореном повратном спрегом у облику

$$H_m(z) = \frac{(1-\sigma)^n}{(z-\sigma)^n}, \quad (4.6)$$

где је σ вредност реалног позитивног пола, а n ред система са затвореном повратном спрегом. Оваква функција преноса обезбеђује стриктно апериодичан одзив са пропусним опсегом који се може наћи по следећој релацији

$$f_{BW} = -\frac{1}{2\pi T} \ln \sigma, \quad (4.7)$$

и рецимо за вредност пола $\sigma = 0,9$ и периоду одабирања $T = 300 \mu s$ имаћемо пропусни опсег од скоро 56 Hz. На основу изабране функције преноса $H_m(z)$ елиминисали смо један степен слободе у пројектовању полиномног регулатора. Следећи корак би био одређивање степена полинома опсервера $A_o(z)$, који ће на даље играти улогу у одређивању степена полинома $R(z)$ и $S(z)$.

4.2 Полином опсервера $A_o(z)$

Полином опсервера игра битну улогу у каузалности пројектовања дигиталног регулатора. То се види из једначине (2.20) где полином опсервера омогућује једнакост леве и десне стране једначине. На основу те једначине, жељеног реда система са затвореном повратном спрегом, степена полинома нула процеса које се желе скратити, бира се степен полинома опсервера по неједначини (2.63). У литератури [1] и [7] се бира *dead-beat* облик полинома опсервера. Међутим, таква форма полинома омогућава велику вредност шума у командном сигналу који је излаз из полиномног регулатора, а што ће се неминовно одразити и на шум у електромагнетском моменту. Шум у електромагнетском моменту додатно загрева магнетно коло мотора наизменичне струје. Шум се јавља у сигналу повратне спреге, који је у овом случају процењена вредност брзине вратила мотора. Он има квантизациону природу, јер настаје због ограничене резолуције *up-down* бројача синхроконвертора. Шум се може јавити и на месту деловања момента оптерећења на систем. Оба извора шума утичу на излаз система са својом функцијом дискретног преноса, што се јасно види у једначини (2.72).

На основу једначине (2.72) се може закључити да се избором полинома опсервера у којој се губи форма *dead-beat* може постићи да појачања од шума квантизације и од поремећаја до излаза система имају минималну вредност.

У општем облику полином опсервера $A_o(z)$ другог реда би имао форму

$$A_o(z) = z^2 + az + b. \quad (4.8)$$

Може се математичким поступком одредити оптимална вредност коефицијената полинома опсервера, таквих да систем има жељену динамику, уз смањен шум у сигналу брзине и управљачком сигналу на излазу из полиномног регулатора.

Један, а и најважнији критеријум при таквом пројектовању је стабилност система са затвореном повратном спрегом, која неминовно мора бити обезбеђена са половима *IIR* филтра унутар јединичног круга. Овакав проблем је тешко решити у генералној форми за системе вишег реда, али се рачун може

упростити давањем конкретних вредности одређеним променљивим у функцији дискретног преноса процеса $H(z)$.

Пошто се при пројектовању оваквог дигиталног регулатора има више степени слободе, параметарска оптимизација за стабилан дигитални регулатор није једноставна за системе вишег реда, какав је брзински сервомеханизам са реалним ограничењима. Функција дискретног преноса $H(z)$ може, у параметарској оптимизацији, да узме конкретне вредности коефицијената и на тај начин се може олакшати избор појединих вредности за коефицијенте полова опсервера и вредност вишеструког пола система са затвореном повратном спрегом. Области у којима се могу кретати дате вредности параметара одређене су *Jury*-јевим тестом стабилности на основу услова да полови *IIR* филтра треба да леже унутар јединичног круга комплексне z равни.

4.2.1. ПАРАМЕТАРСКА ОПТИМИЗАЦИЈА ЗА СИСТЕМ ТРЕ ЋЕГ РЕДА

На основу једначине (2.31) и једначине (4.3) могу се добити вредности коефицијената полинома $R(z)$ и $S(z)$ у функцији вишеструког пола система са затвореном повратном спрегом и коефицијената полинома опсервера. Након спроведене анализе која је детаљно објашњена у другом поглављу добија се да је ред полинома $R(z)$, два, тј. форма *IIR* филтра је

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{1}{z^2 + r_1 \cdot z + r_0}. \quad (4.9)$$

На основу датих коефицијената полинома $R(z)$ може се спровести *Jury*-јев алгебарски критеријум стабилности. За систем n -тог реда може се формирати шема коефицијената за моничан полином $R(z)$, по следећој табели.

| Врста | z^0 | z^1 | z^2 | | z^{n-k} | | z^{n-1} | z^n |
|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----|-------------|-------|
| 1 | r_0 | r_1 | r_2 | ... | r_{n-k} | ... | r_{n-1} | 1 |
| 2 | 1 | r_{n-1} | r_{n-2} | ... | r_k | ... | r_1 | r_0 |
| 3 | $r_{0,0}$ | $r_{0,1}$ | $r_{0,2}$ | ... | $r_{0,n-k}$ | ... | $r_{0,n-1}$ | |
| 4 | $r_{0,n-1}$ | $r_{0,n-2}$ | $r_{0,n-3}$ | ... | $r_{0,k-1}$ | ... | | |
| 5 | $r_{1,0}$ | $r_{1,1}$ | $r_{1,2}$ | ... | $r_{1,n-k}$ | ... | | |
| 6 | $r_{1,n-2}$ | $r_{1,n-3}$ | $r_{1,n-4}$ | ... | $r_{1,k-2}$ | ... | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ | | | |
| $2n-5$ | $r_{n-4,0}$ | $r_{n-4,1}$ | $r_{n-4,2}$ | $r_{n-4,3}$ | | | | |
| $2n-4$ | $r_{n-4,3}$ | $r_{n-4,2}$ | $r_{n-4,1}$ | $r_{n-4,0}$ | | | | |
| $2n-3$ | $r_{n-3,0}$ | $r_{n-3,1}$ | $r_{n-3,2}$ | | | | | |

Табела 4.1. *Jury*-јева шема коефицијената

Елементи треће врсте се формирају на основу прве две врсте, које су директно одређене из полинома $R(z)$, по следећој једначини,

$$r_{0,k} = \begin{vmatrix} r_0 & r_{n-k} \\ 1 & r_k \end{vmatrix}, \quad i = 0..n-1, \quad (4.10)$$

а елементи 5 врсте и осталих непарних врста се формирају на основу следеће једнакости

$$r_{i,j} = \begin{vmatrix} r_{i-1,0} & r_{i-1,n-i-j} \\ r_{i-1,n-i} & r_{i-1,j} \end{vmatrix}, \quad i = 0..n-3, \quad j = 0..n-1-i. \quad (4.11)$$

За систем другог реда *Jury*-јев тест се своди на

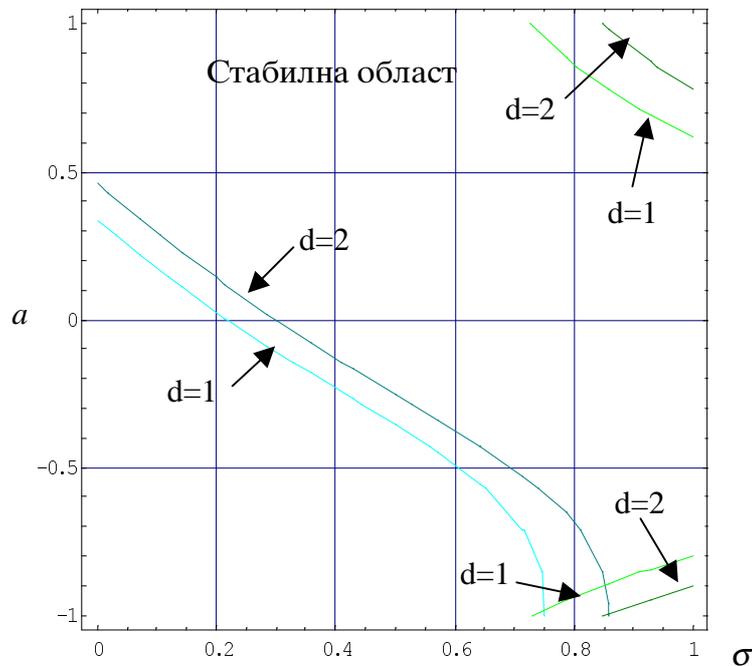
$$R(1) > 0, \quad R(-1) > 0, \quad |r_0| < 1, \quad (4.12)$$

или са обзиром на вредности коефицијената

$$1 + r_1 + r_0 > 0, \quad 1 - r_1 + r_0 > 0, \quad |r_0| - 1 < 0. \quad (4.13)$$

Услови се могу графички приказати као функције две променљиве, пола опсервера и вишеструког пола система са затвореном повратном спрегом, ако се дати услови представе у форми једначина

$$1 + r_1 + r_0 = 0, \quad 1 - r_1 + r_0 = 0, \quad |r_0| - 1 = 0. \quad (4.14)$$



Слика 3. График функције (4.14)

На основу датог графика може се одредити област у (σ, a) -равни у којој су испуњени услови у једначини (4.13).

Што се тиче добијених графика, потребно је објаснити процедуру дизајна дигиталног регулатора у овом случају. Изабрана је опција у којој се не скраћују нуле процеса, тако да се по услови (2.63), закључује да је полином опсервера другог реда, и он је изабран у форми

$$A_0(z) = (z - a)^2. \quad (4.15)$$

Жељена форма карактеристичног полинома је

$$H_m(z) = \frac{(1 - \sigma)^3 B(z)}{(z - \sigma)^3 B(1)}, \quad (4.16)$$

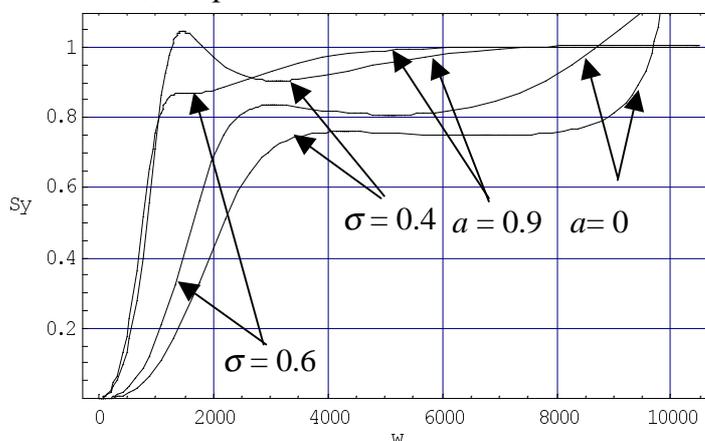
где је σ вишеструки пол система са затвореном повратном спрегом, који се постиже *pole-placement*-ом. Као резултат процедуре добија се дигитални регулатор, односно тражени полиноми $R(z)$, $S(z)$ и $T(z)$.

Као резултат симулација може се извести закључак, да се робуснија структура регулатора постиже уколико се не скрате нуле процеса. Шум у електромагнетском моменту се може смањити погодним избором коефицијента a , а жељена динамика погодним избором пола σ . За изабрану структуру може се формирати функција осетљивости излаза

$$S = \frac{\partial H_m(z)}{\partial H(z)} \frac{H(z)}{H_m(z)} = \frac{A(z)R(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} \quad (4.17)$$

у односу на варијације параметара процеса.

За вредности пола σ и пола опсервера a , дата је њена зависност у функцији кружне учестаности одабирања.

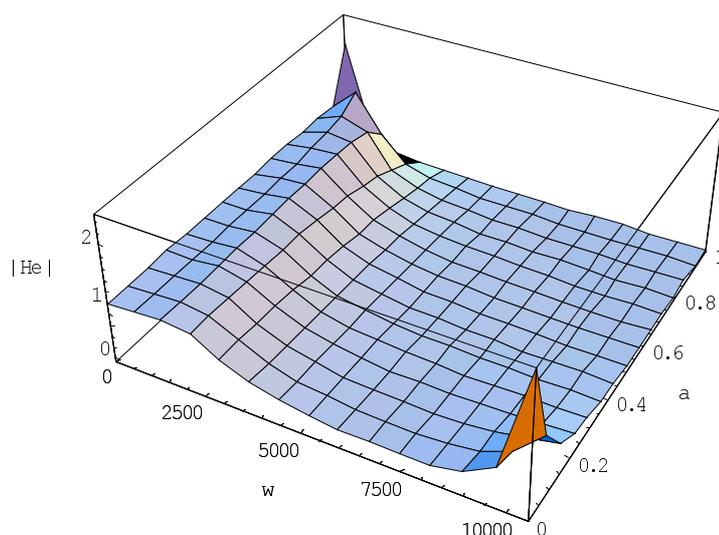


Слика 4. Функција осетљивости S

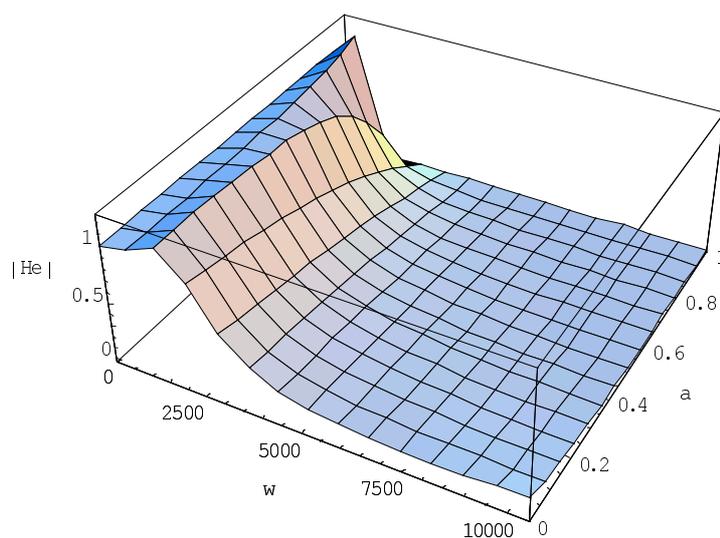
Са слике 4 се може закључити да се при избору полова опсервера и пола затворене спреге избегава *dead-beat* полином опсервера, јер функција осетљивости при различитим вредностима пола σ , мења вредност у већим границама.

На следећој слици је дата зависност појачања шума услед квантизације мерења позиције осовине мотора, према функцији преноса датој у (2.72а)

$$H_e(z) = -\frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}. \quad (4.18)$$



Слика 5. Функција преноса шум мерења - излаз за $\sigma = 0,4$



Слика 6. Функција преноса шум мерења - излаз за $\sigma = 0,6$

Избор пола опсервера се врши тако да при високим учестаностима појачање буде што мање, а то су вредности од 0,6 до 0,9.

4.2.2. ПАРАМЕТАРСКА ОПТИМИЗАЦИЈА ЗА СИСТЕМ ПЕТОГ РЕДА

За систем четвртог реда *Jury*-јев тест се своди на

$$R(1) > 0, \quad R(-1) > 0, \quad |r_0| < 1, \quad |r_{0,0}| > |r_{0,3}|, \quad |r_{1,0}| > |r_{1,2}|, \quad (4.19)$$

или са обзиром на вредности коефицијената

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_0 &> 0, \\ 1 - r_1 + r_0 &> 0, \\ |r_0| - 1 &< 0, \\ |r_0^2 - 1| - |r_0 r_3 - 1| &> 0, \\ \left| (r_0^2 - 1)^2 - (r_0 r_3 - r_1)^2 \right| - \left| (r_0^2 - 1)(r_0 - 1)r_2 - (r_0 r_1 - r_3)(r_0 r_3 - r_1) \right| &> 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

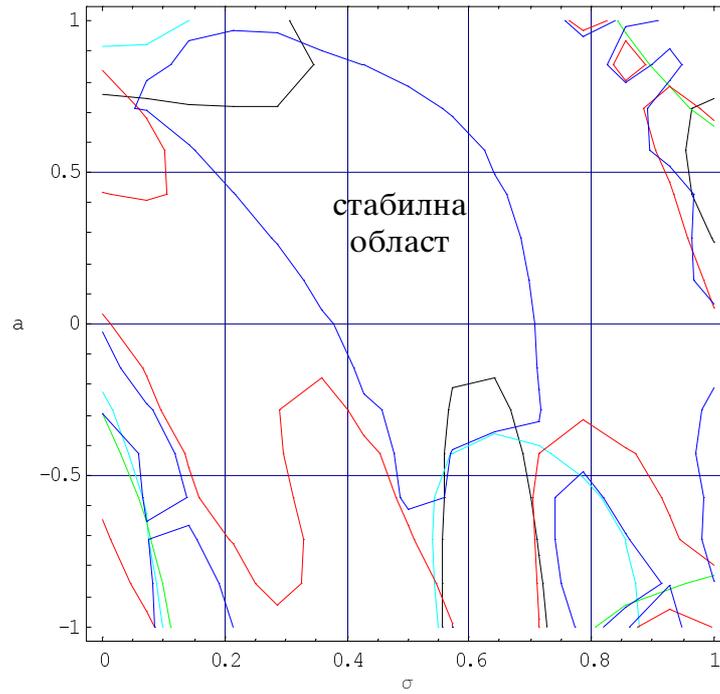
Услови се могу графички приказати као функције две променљиве, пола опсервера и вишеструког пола система са затвореном повратном спрегом, ако се дати услови представе у форми једначина

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_0 &= 0, \\ 1 - r_1 + r_0 &= 0, \\ |r_0| - 1 &= 0, \\ |r_0^2 - 1| - |r_0 r_3 - 1| &= 0, \\ \left| (r_0^2 - 1)^2 - (r_0 r_3 - r_1)^2 \right| - \left| (r_0^2 - 1)(r_0 - 1)r_2 - (r_0 r_1 - r_3)(r_0 r_3 - r_1) \right| &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

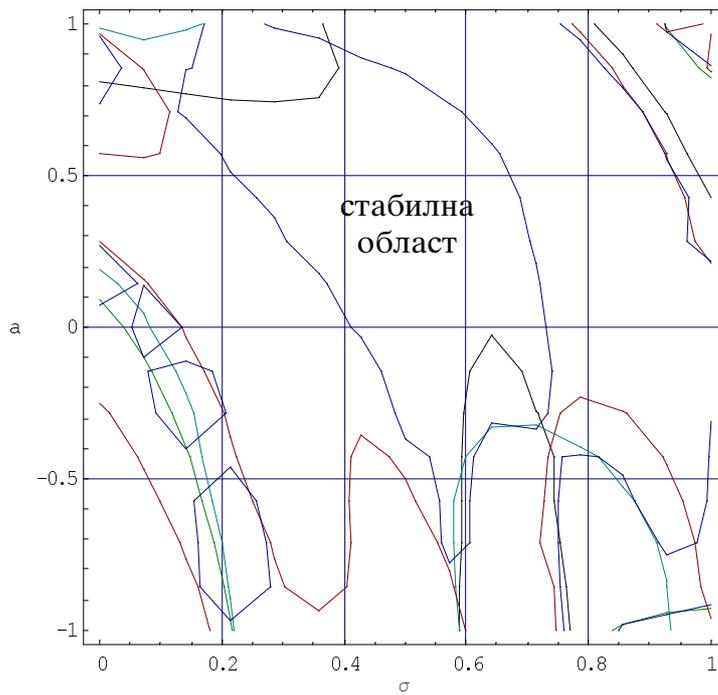
Изабрана је опција у којој се не скраћују нуле процеса, тако да се по услову (2.63), закључује да је полином опсервера другог реда, и он је изабран у форми

$$A0(z) = (z - a)^2 ((z - \text{real}(\underline{a}_1))^2 + \text{imag}(\underline{a}_1)^2), \quad (4.22)$$

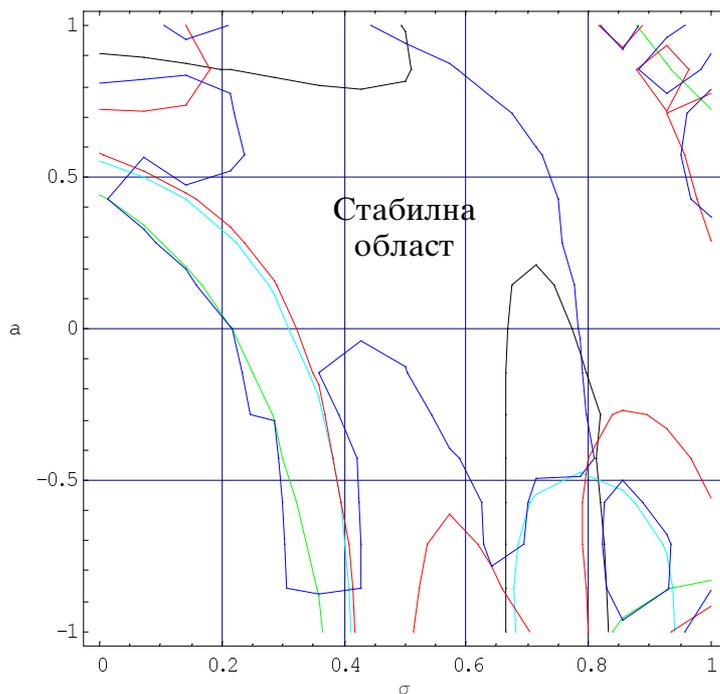
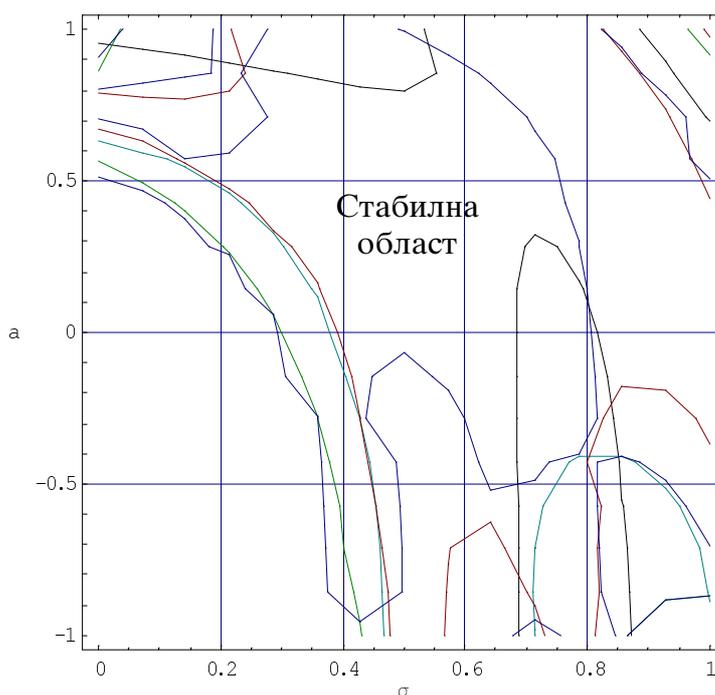
где је \underline{a}_1 вредност комплексног пола полинома опсервера који треба да буде у околини комплексног пола процеса који се јавља као последица еластичне везе осовине мотора и оптерећења. На следећим сликама може се видети стабилна област у којој се могу кретати полови опсервера и пол система, ако се два пола опсервера фиксирају, на вредност блиску вредности коњуговано комплексног пола система у отвореној спреси. Оваква логика је слична имплементацији *notch*-филтра, чија је функција елиминисање осилаторних модова у брзини и управљачком сигналу када се систем побуди са одскочном функцијом.



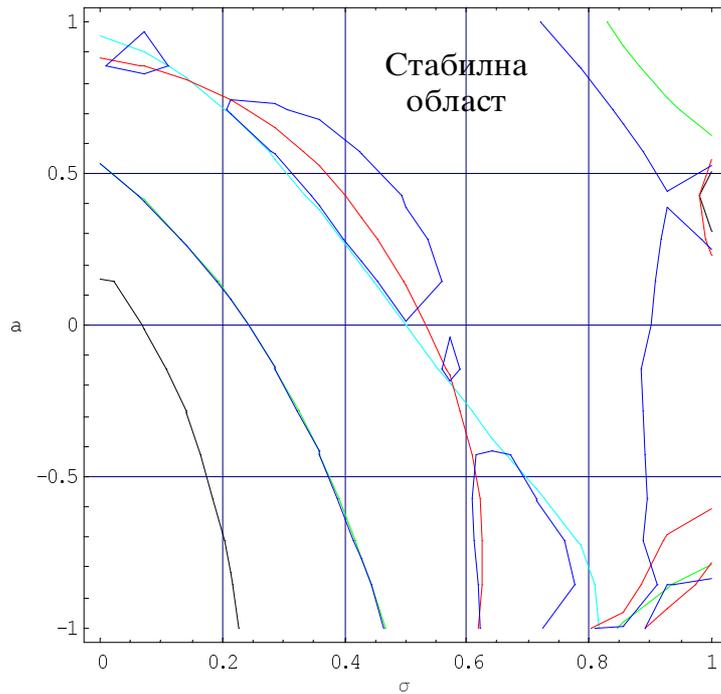
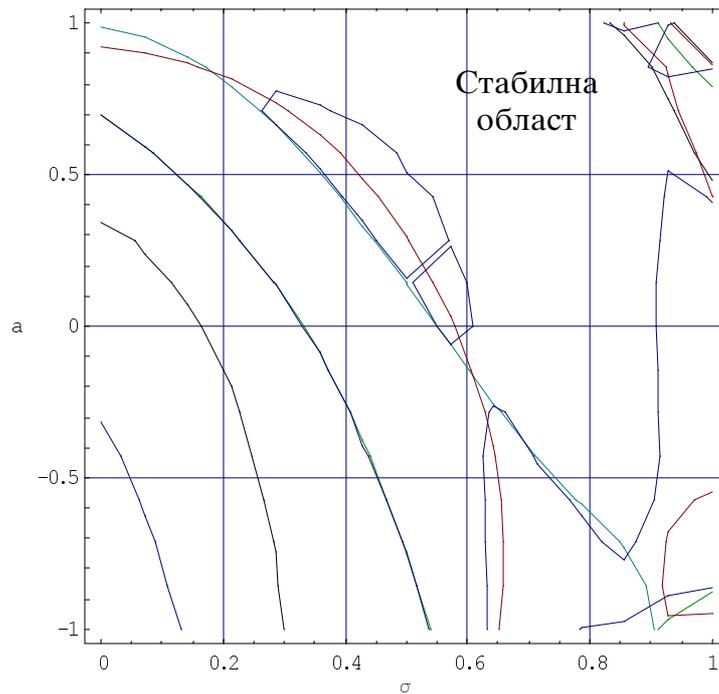
Слика 7. Функција (4.21) за $d=1$, $a_1=0.9+j0.3$



Слика 8. Функција (4.21) за $d=2$, $a_1=0.9+j0.3$

Слика 9. Функција (4.21) за $d=1$, $\underline{a}_1=0.8+j0.3$ Слика 10. Функција (4.21) за $d=2$, $\underline{a}_1=0.8+j0.3$

На основу претходне две слике може се закључити да се област стабилности проширује са лошом проценом пола опсервера, али то има лоша својства на рипл у електромагнетском моменту и квалитет одзива брзине сервосистема, што ће бити показано рачунарском симулацијом.

Слика 11. Функција (4.21) за $d=1$, $\underline{a}_1=0.9+j0.4$ Слика 12. Функција (4.21) за $d=2$, $\underline{a}_1=0.9+j0.4$

На основу датих графика може се одредити област у (σ, a) -равни у којој су испуњени услови у једначини (4.21).

Жељена форма карактеристичног полинома је

$$H_m(z) = \frac{(1-\sigma)^5 B(z)}{(z-\sigma)^5 B(1)}, \quad (4.23)$$

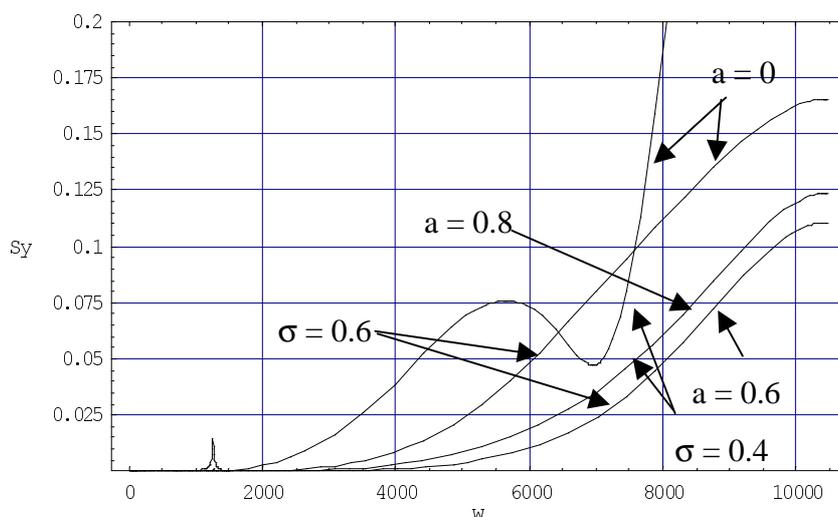
где је σ вишеструки пол система са затвореном повратном спрегом, који се постиже *pole-placement*-ом. Као резултат процедуре добија се дигитални регулатор, односно тражени полиноми $R(z)$, $S(z)$ и $T(z)$.

Шум у електромагнетском моменту се може смањити погодним избором коефицијента a , а жељена динамика погодним избором пола σ . За изабрану структуру може се формирати функција осетљивости излаза

$$S = \frac{\partial H_m(z)}{\partial H(z)} \frac{H(z)}{H_m(z)} = \frac{A(z)R(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} \quad (4.24)$$

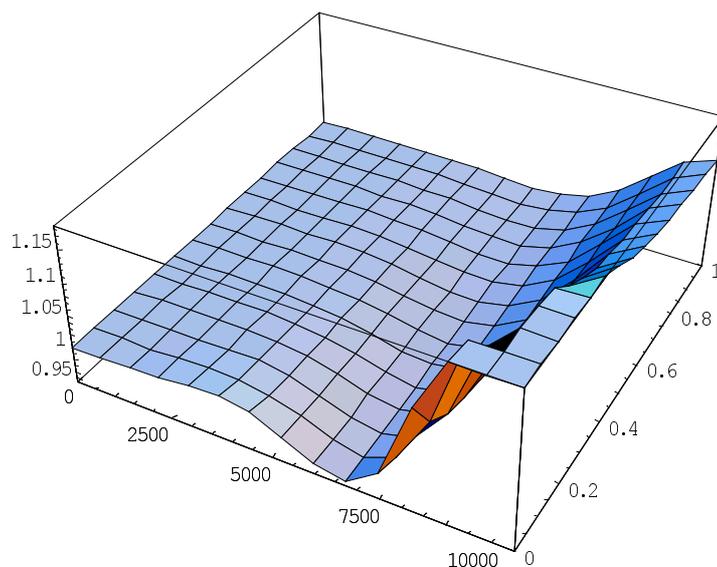
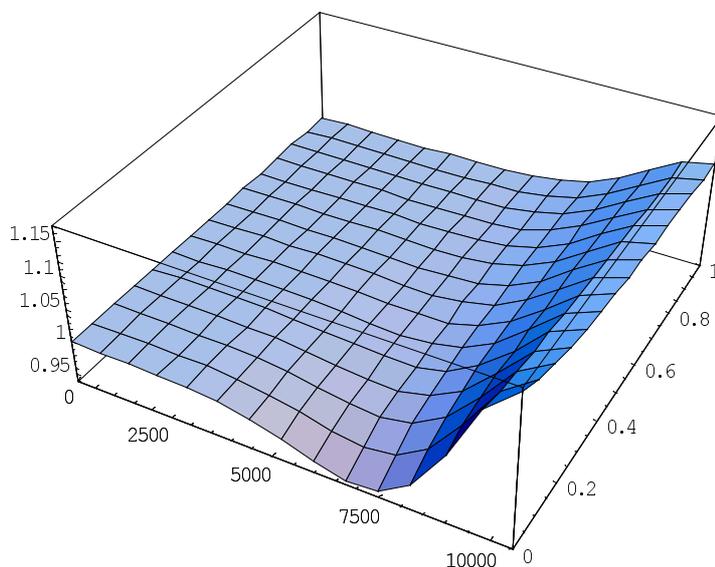
у односу на варијације параметара процеса.

За вредности пола σ и пола опсервера a , дата је њена зависност у функцији кружне учестаности одабирања.

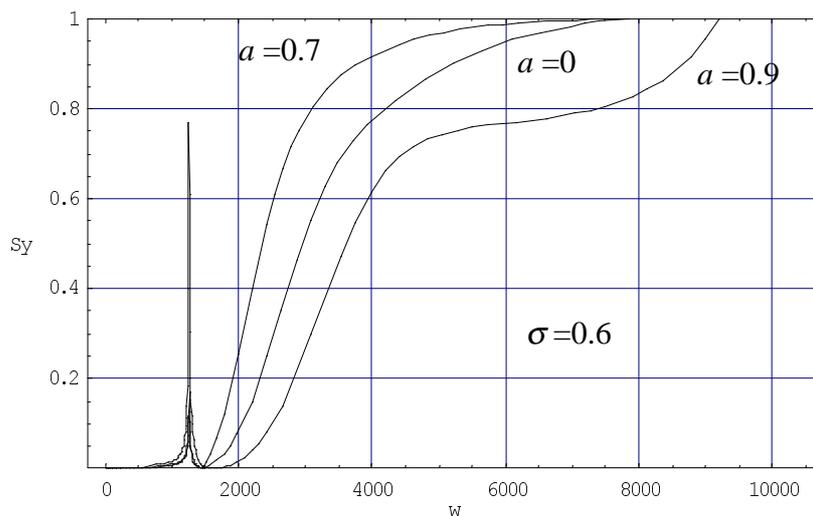


Слика 13. Функција осетљивости излаза система на промене параметара процеса за вредност полинома опсервера $A0(z) = (z-a)^2((z-0.9)^2 + 0.3^2)$

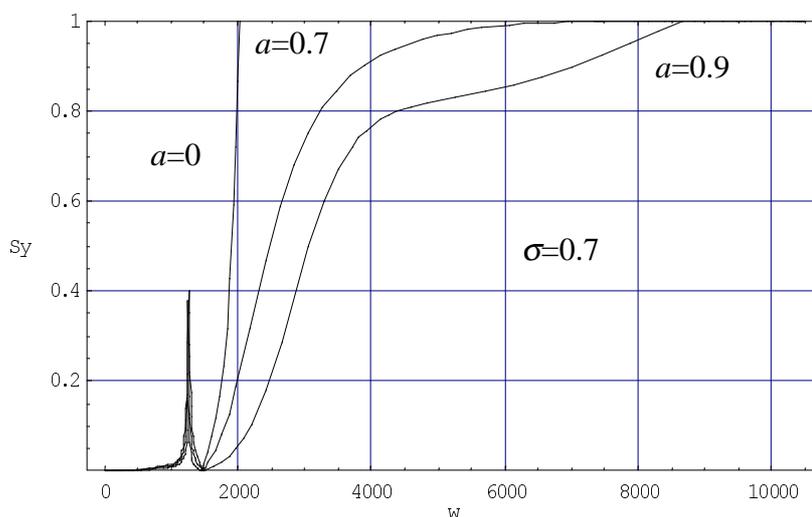
Функција осетљивости на слици 13. је одређена по једначини (4.24) и лоше процењеном коњуговано комплексног пола процеса. Са слике се може приметити да *dead-beat* форма опсервера повећава осетљивост система на промене параметара процеса. То значи да ће наш систем са затвореном повратном спрегом, бити робуснији уколико се крећемо по горњој десној граници стабилне области. Задовољићемо се решењем које даје мању вредност појачања шума квантизације на излазу сервомеханизма. Стога је на следећој слици дата вредност функције појачања шум - излаз у изразу (4.18).

Слика 14. *Функција преноса шум мерења - излаз за $\sigma = 0,4$* Слика 15. *Функција преноса шум мерења - излаз за $\sigma = 0,6$*

Са слике се може приметити да оваквим избором полова опсервера нећемо добити адекватно слабљење сигнала шума у његовом високофреквентном подручју. На излазу система постоји шум квантизације који се преноси кроз систем све до управљачке променљиве, и на тај начин ће електромагнетски моменат бити зашумљен.

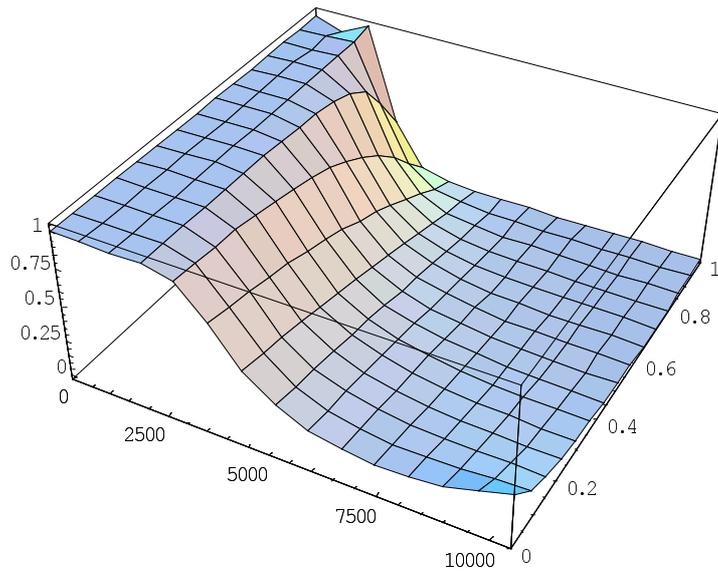


Слика 16. *Функција осетљивости излаза система на промене параметара процеса за вредност полинома опсервера $A_0(z) = (z - a)^2((z - 0.9)^2 + 0.4^2)$*

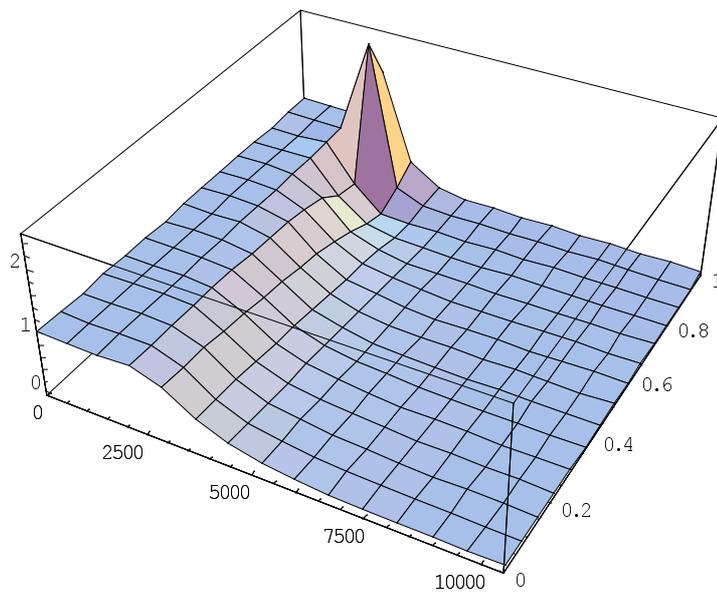


Слика 17. *Функција осетљивости излаза система на промене параметара процеса за вредност полинома опсервера $A_0(z) = (z - a)^2((z - 0.9)^2 + 0.4^2)$*

На сликама 16. и 17. се види оптималан избор пола опсервера при изабраном полу система са затвореном повратном спрегом, по критеријуму функције осетљивости излаза система на промене параметара процеса.



Слика 18. *Функција преноса шум мерења - излаз за $\sigma = 0,6$*



Слика 19. *Функција преноса шум мерења - излаз за $\sigma = 0,7$*

На сликама 18. и 19. Дат је приказ појачања шум мерења - излаз система и може се закључити да ће шум квантизације успешно бити потиснут.

5. РАЧУНАРСКЕ СИМУЛАЦИЈЕ

Симулациони програм који је коришћен у овом раду *Simulink*, као саставни део програмског пакета *MATLAB 5.2*. За сложенија израчунавања и функционалне зависности коришћен је програмско пакет *Mathematica 3.0*. Шеме брзинског сервомеханизма, као и дигиталног регулатора, могу се видети у прилогу Ц. Параметри који су сматрани познатим током симулације узети су за мотор FAST1M6030 синхрони мотор са перманентним магнетима на ротору и електромагнетним ризолвером спрегнутим на осовину мотора.

Подаци за мотор су следећи:

$$M_{nom} = 5.7 \text{ Nm}$$

$$M_{max} = 24 \text{ Nm}$$

$$\omega_{nom} = 3000 \text{ rad/min}$$

$$P_{nom} = 1,49 \text{ kW}$$

$$p = 3$$

$$J_m = 0,00062 \text{ kgm}^2 \text{ (момент инерције мотора заједно са ризолвером)}$$

Подаци о осовини са оптерећењем:

$$J_l = 0.00022 \text{ kgm}^2 \text{ (осовина и момент инерције купловања)}$$

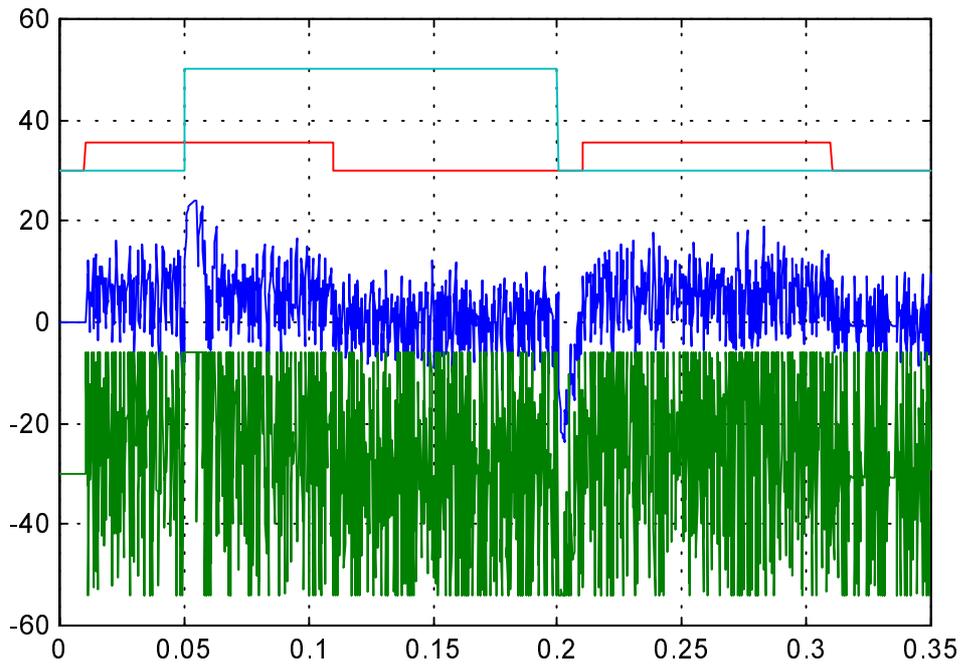
$$K_s = 350 \text{ Nm/rad} \text{ коефицијент торзије}$$

$$K = 0.004 \text{ Nms/rad} \text{ коефицијент трења}$$

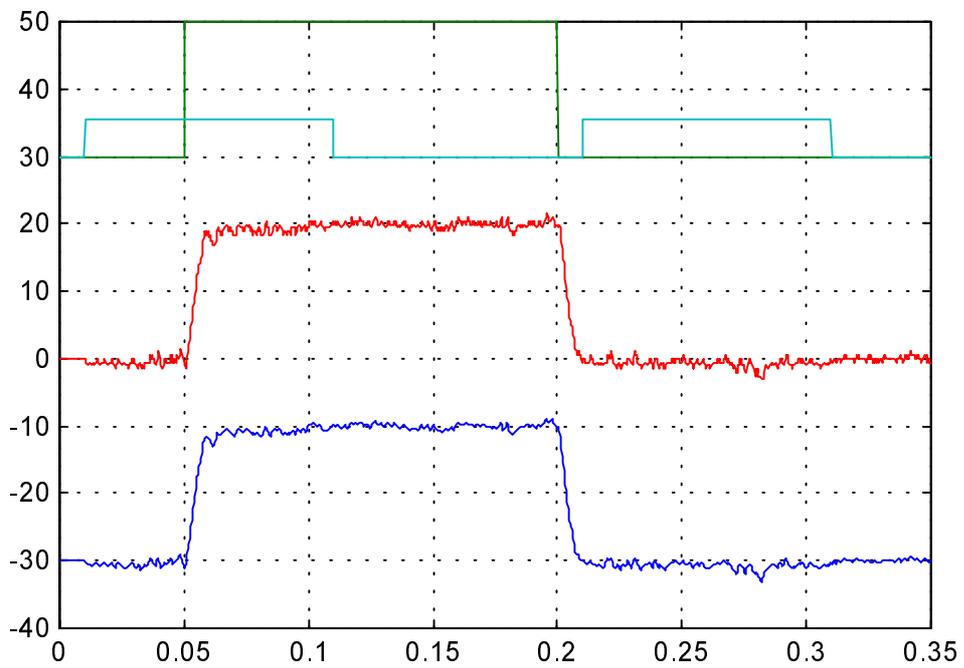
5.1. Рачунарске симулације за систем трећег реда

На сликама од 1 до 12 представљени су резултати симулација на рачунару за систем трећег реда. Вредности полова опсервера и система са затвореном повратном спрегом су дате на свакој слици појединачно. Прва слика (нпр: слика 1) садржи временске одзиве момента на статору мотора и управљачког момента на излазу из дигиталног регулатора. Размера за моменат је 1 Nm/под . На истој слици се могу видети референтна вредност брзине 200 rad/s у размери од 10 rad/s/под и номинална вредност момента оптерећења од $5,7 \text{ Nm}$ у одговарајућој размери момента. На слици 2 су редом процењена тј. измерена брзина мотора и стварна брзина мотора респективно у размери за брзину као на слици 1. Временска оса на свим графицима је у размери $0,05 \text{ s/под}$. Генерални закључак који се може извести из симулација је да се вредност шума у електромагнетском моменту смањује повећањем пола опсервера. Разлог зашто вредност пола не може имати максималну вредност ($a = 1$) лежи у томе што би се на тај начин поништило интегрално дејство дигиталног регулатора које се налази у полиному $R(z)$, и на тај начин онемогућило нулту статичку грешку на излазу када на систем делује споропроменљив поремећај.

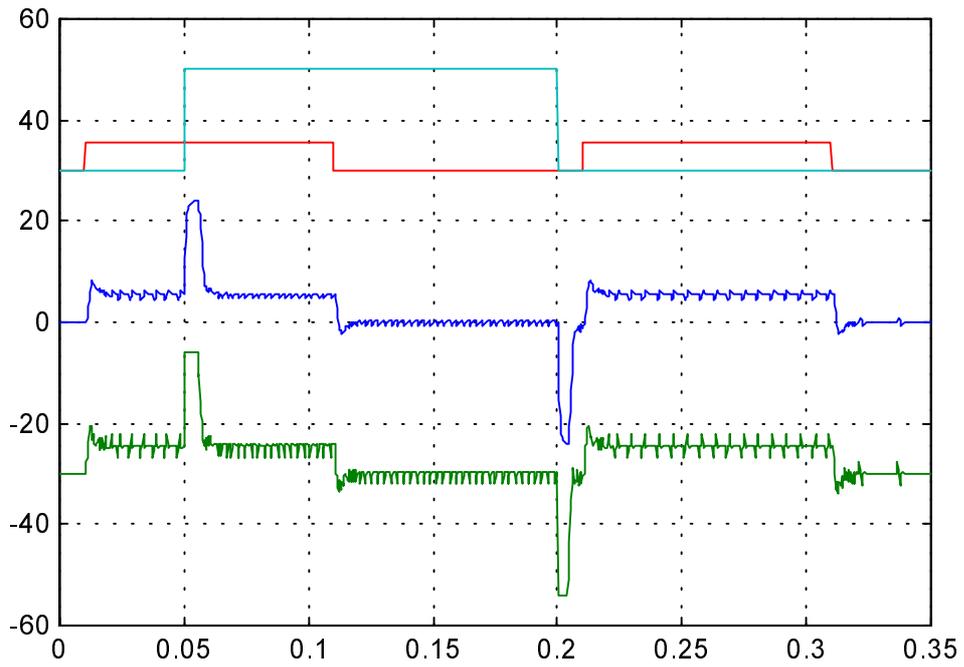
Резултати симулација који се могу видети на сликама 13 до 18, настали су симулирањем система који има двоструко већи моменат инерције од момента инерције који је узет за прорачун дигиталног регулатора. На основу датих симулација може се закључити да је предложена форма регулатора у потпуности задовољила критеријум робустности. Очекивани прескоци у брзини мотора леже у дозвољеним границама, а шум у електромагнетском моменту је знатно смањен са већом вредношћу пола система са затвореном повратном спрегом σ . Вредност момента је ограничена на $M_{emmax} = 24 \text{ Nm}$, и због уласка актуатора у засићење, вредност пропусног опсега система се не може сматрати оном коју одређује пол σ .



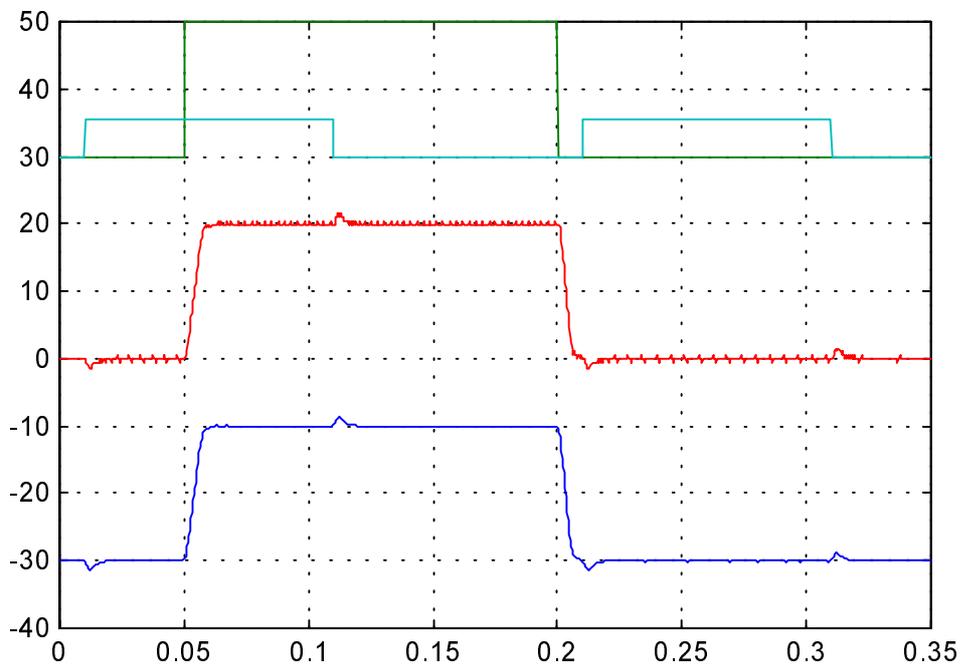
Слика 1. Електромагнетски моменат M_{cm}^* и M_{cm} ($\sigma = 0.6, a=0$)



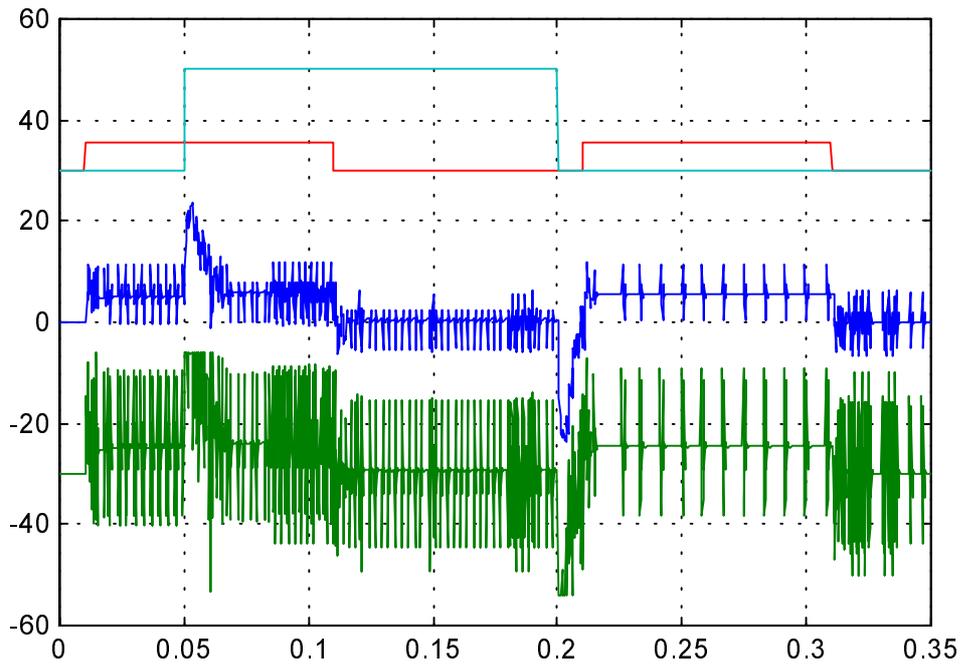
Слика 2. Брзина мотора и измерена брзина ($\sigma = 0.6, a=0$)



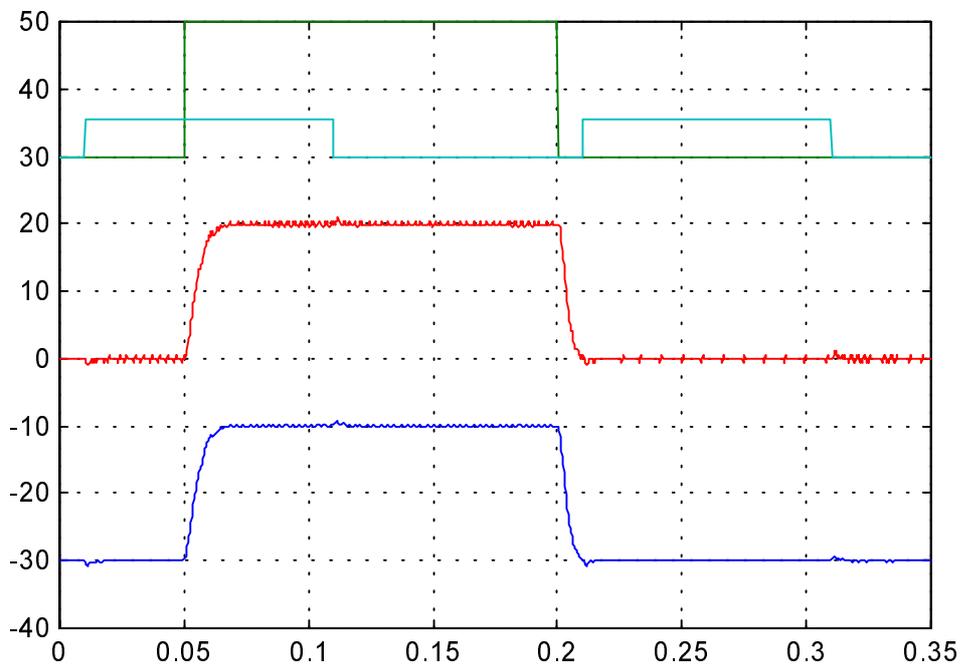
Слика 3. Електромагнетски моменат M_{em}^* и M_{em} ($\sigma = 0,6$, $a=0,8$)



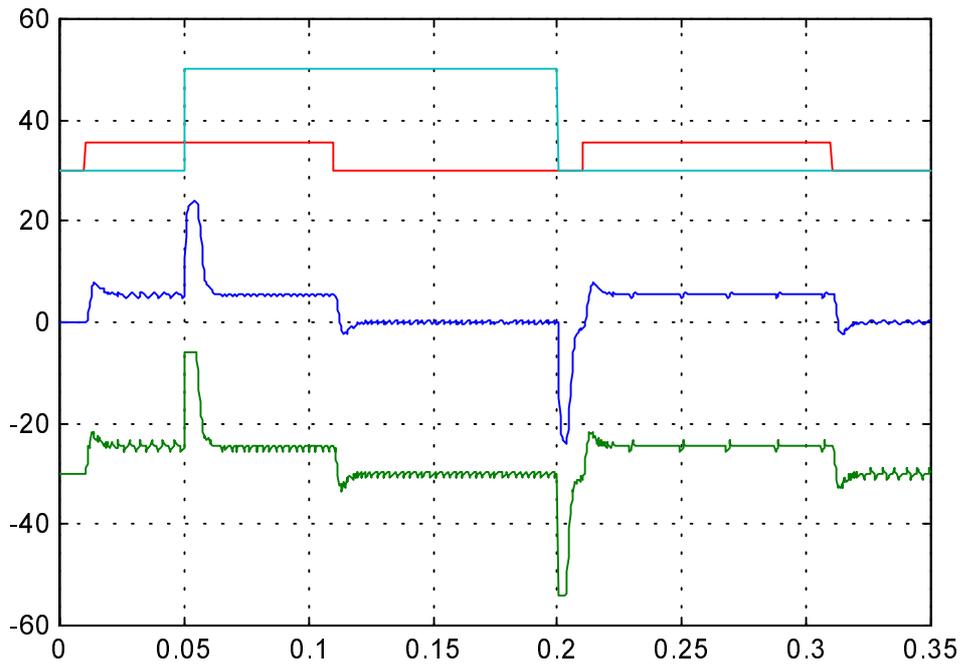
Слика 4. Брзина мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,6$, $a=0,8$)



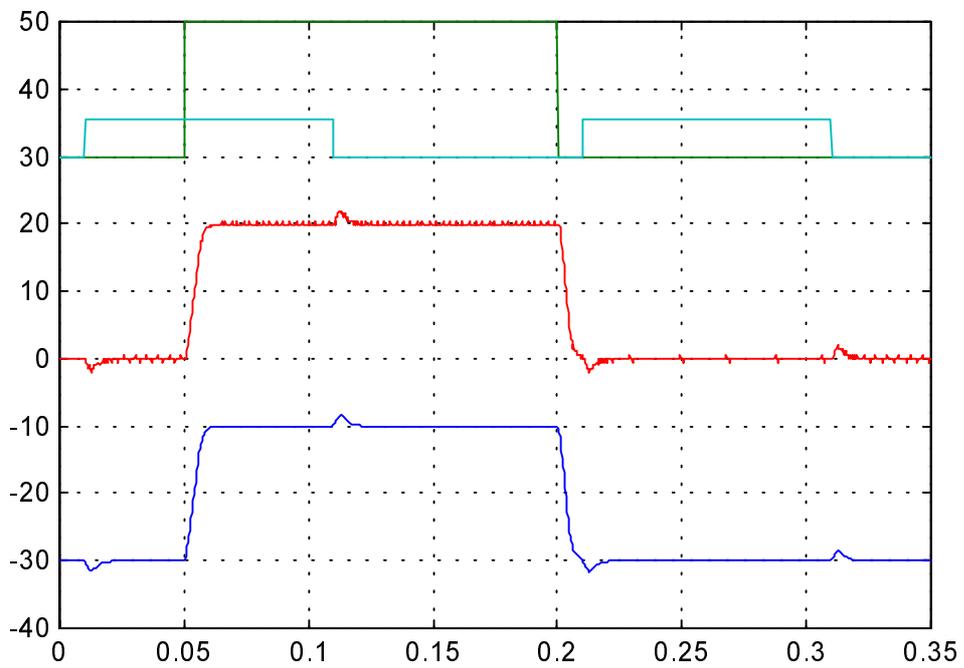
Слика 5. Електромагнетски моменат M_{cm}^* и M_{cm} ($\sigma = 0,7, a=0$)



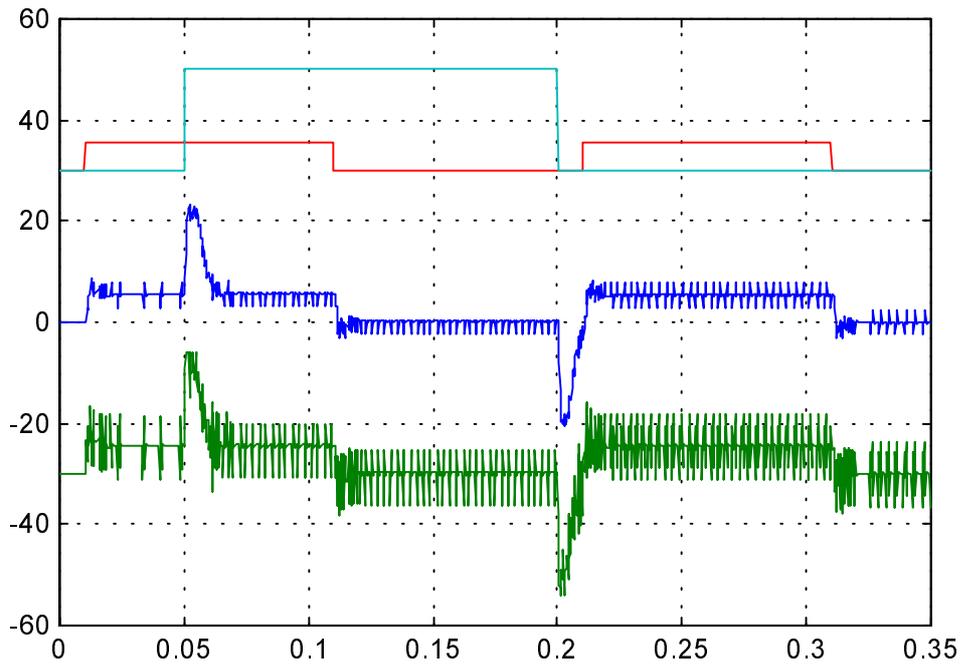
Слика 6. Брзина мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,7, a=0$)



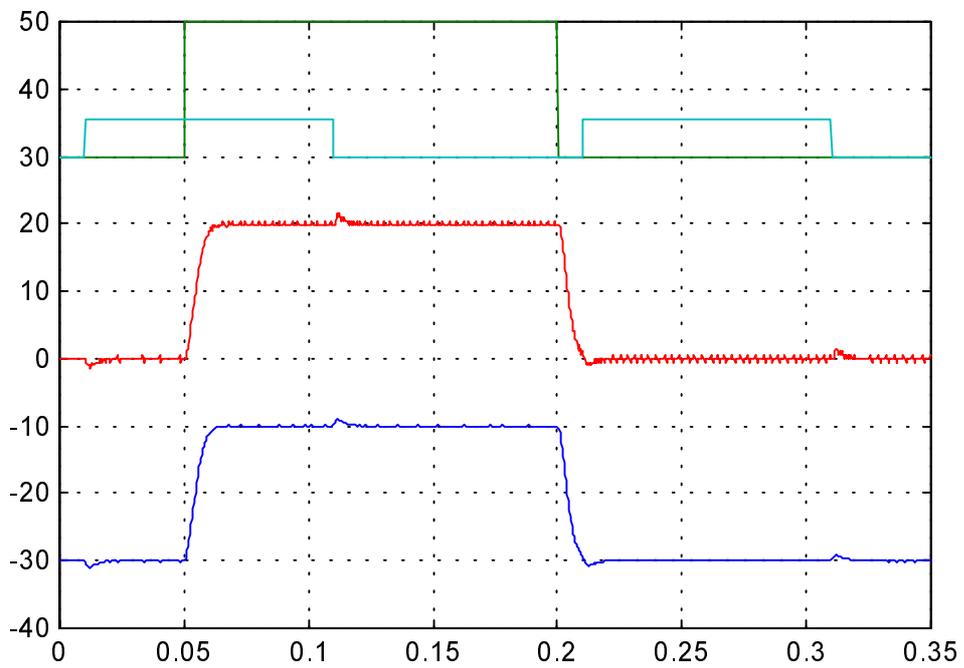
Слика 7. Електромагнетски моменат M_{em}^* и M_{em} ($\sigma = 0,7$, $a=0,8$)



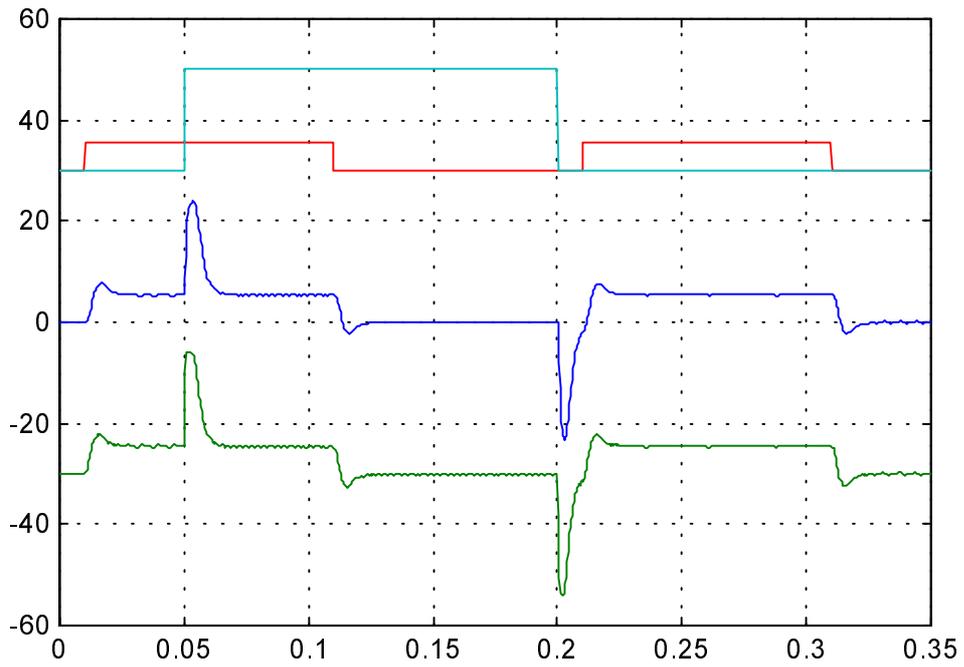
Слика 8. Брзина мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,7$, $a=0,8$)



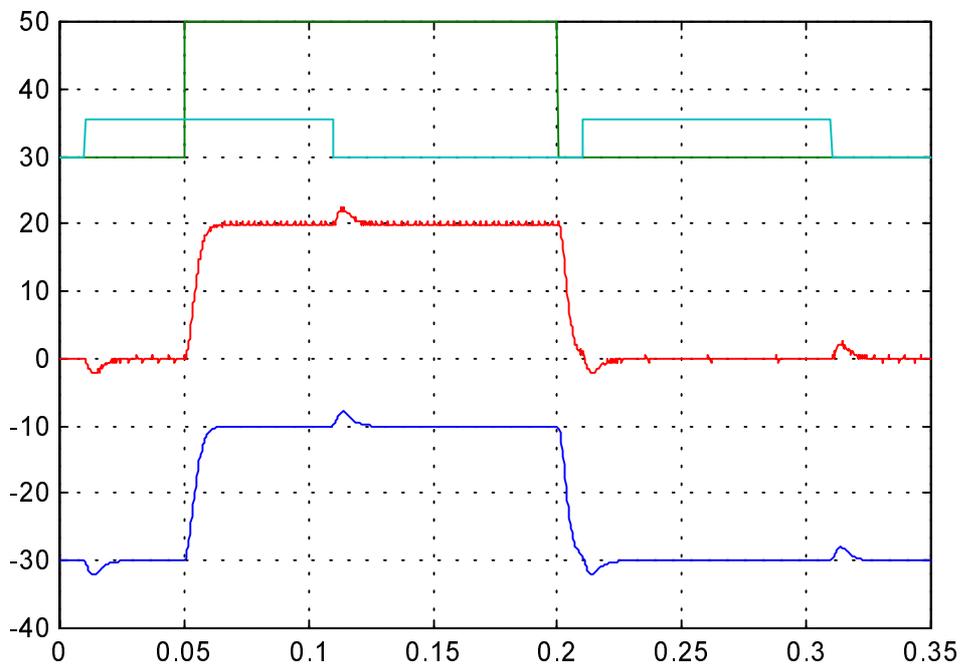
Слика 9. Електромагнетски моменат M_{cm}^* и M_{cm} ($\sigma = 0,8, a=0$)



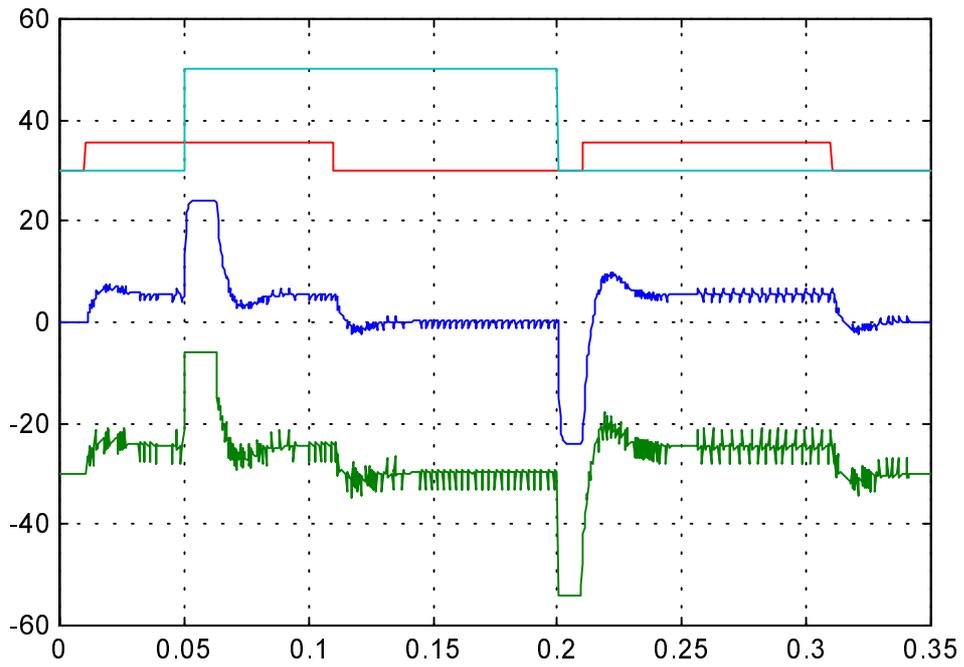
Слика 10. Брзина мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,8, a=0$)



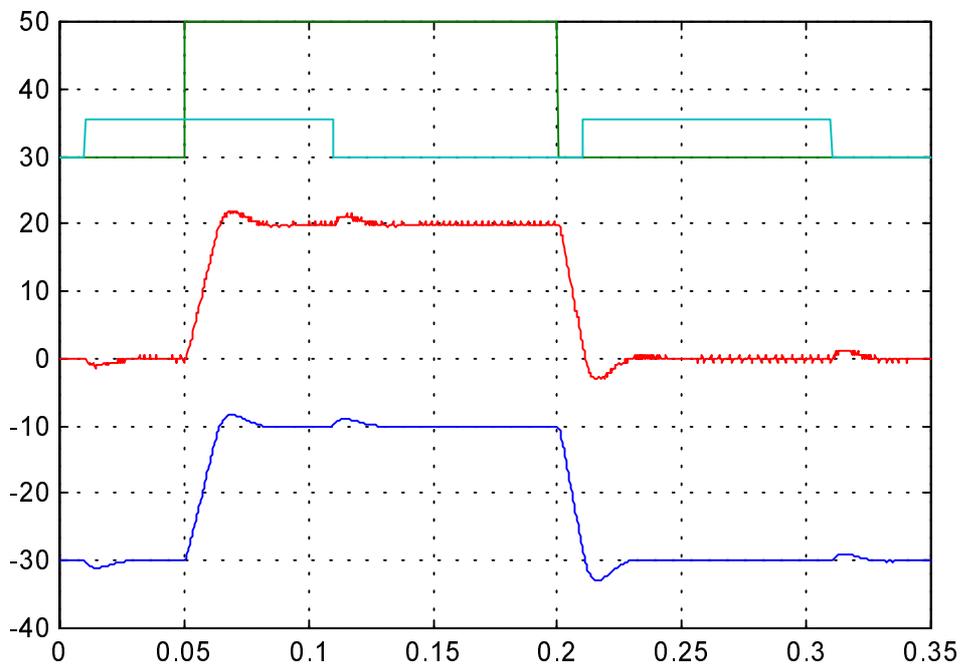
Слика 11. Електромагнетски моменат M_{cm}^* и M_{cm} ($\sigma = 0,8$, $a=0,8$)



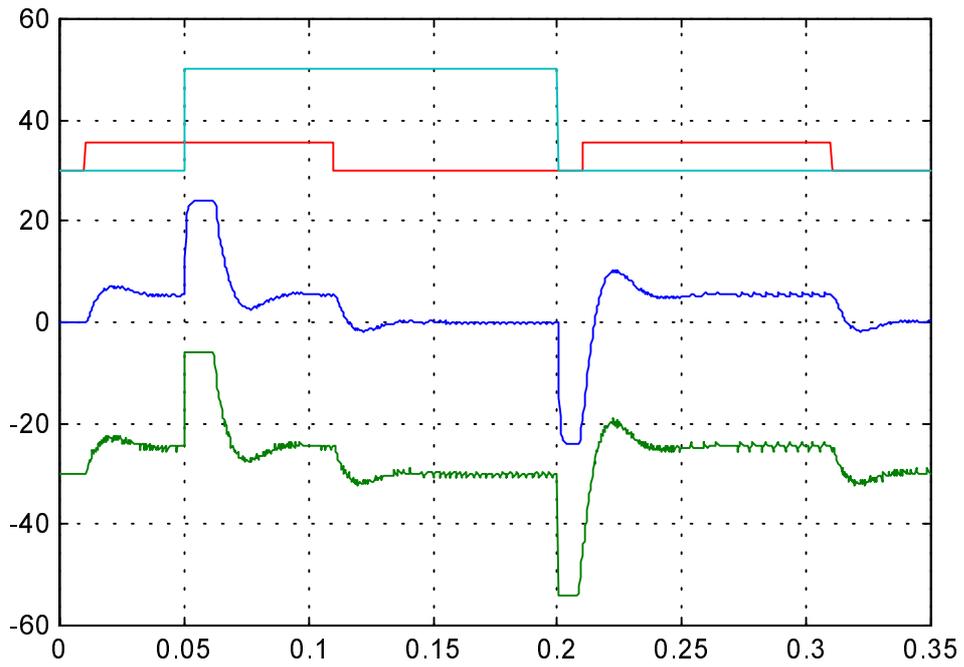
Слика 12. Брзина мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,8$, $a=0,8$)



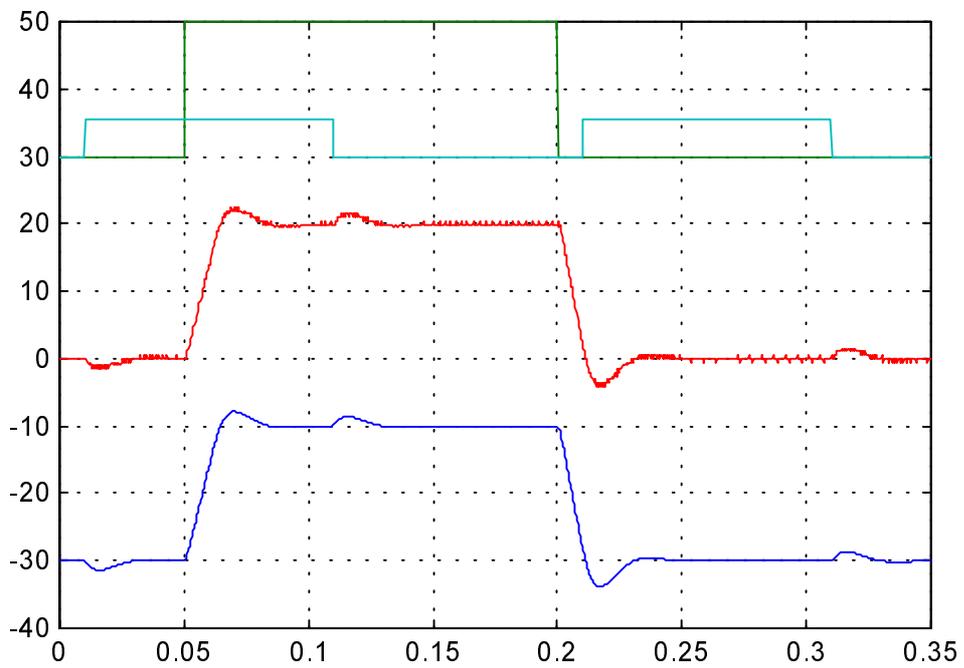
Слика 13. Електромагнетски моменат M_{cm}^* и M_{cm} ($\sigma = 0,4$, $a=0,9$)



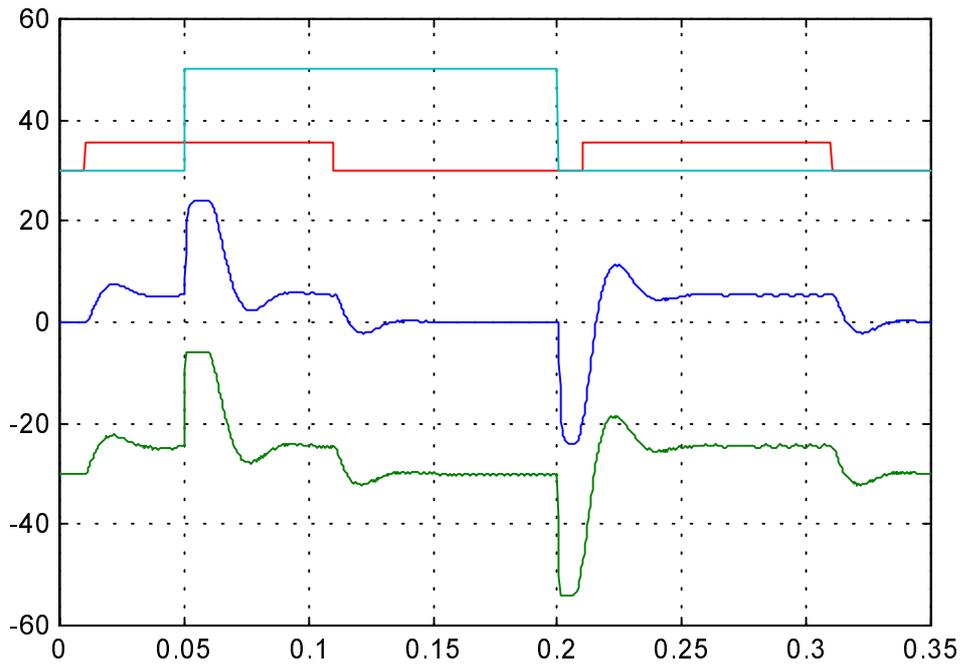
Слика 14. Брзина мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,4$, $a=0,9$)



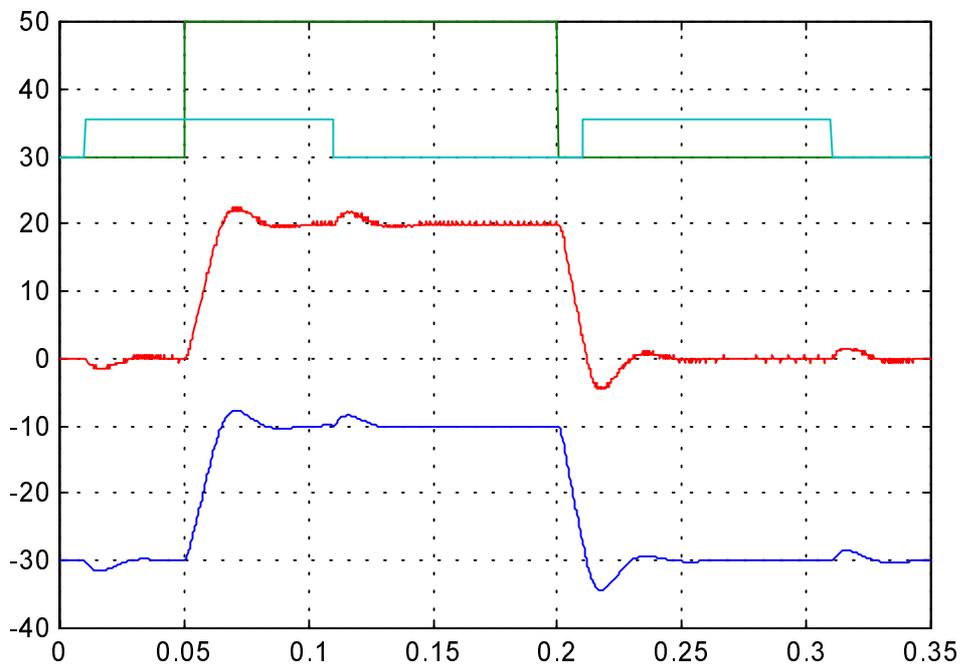
Слика 15. Електромагнетски моменат M_{cm}^* и M_{cm} ($\sigma = 0,6$, $a=0,9$)



Слика 16. Брзина мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,6$, $a=0,9$)



Слика 17. Електромагнетски моменат M_{cm}^* и M_{cm} ($\sigma = 0,8$, $a=0,8$)

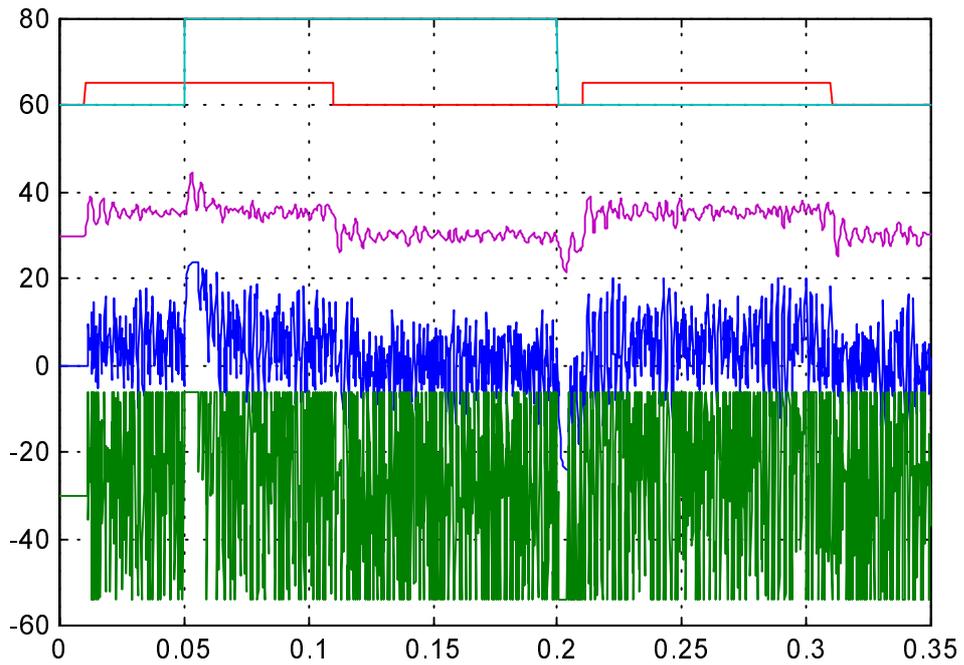


Слика 18. Брзина мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,8$, $a=0,8$)

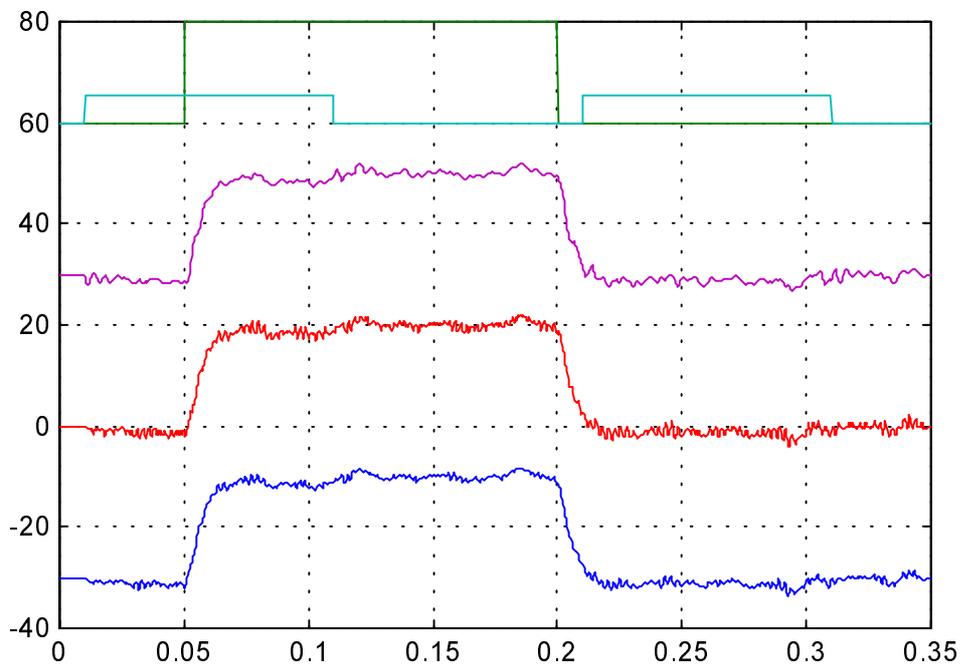
5.2. Рачунарске симулације за систем петог реда

На сликама од 1 до 8 представљени су резултати симулација на рачунару за систем петог реда. Вредности полова опсервера и система са затвореном повратном спрегом су дате на свакој слици појединачно. Прва слика (нпр: слика 1) садржи временске одзиве момента на осовини мотора, затим момента на статору мотора и управљачког момента на излазу из дигиталног регулатора. Размера за моменат је 1 Nm/под. На истој слици се могу видети референтна вредност брзине 200 rad/s у размери од 10 rad/s/под и номинална вредност момента оптерећења од 5,4 Nm у одговарајућој размери момента. На слици 2 су редом угаона брзина оптерећења, процењена тј. измерена брзина мотора и стварна брзина мотора у размери за брзину као на слици 1. Временска оса на свим графицима је у размери 0.05 s/под. Генерални закључак који се може извести из симулација је да се вредност шума у електромагнетском моменту смањује повећањем пола опсервера. Области у којима могу лежати полови опсервера и система са затвореном повратном спрегом анализирани су у области 4. Може се закључити да *dead-beat* ($a = 0$) форма опсервера повећава шум у електромагнетском моменту, али много велика вредност ($a = 0,9$) слаби интегрално дејство и на тај начин успорава промене брзине при променама момента оптерећења.

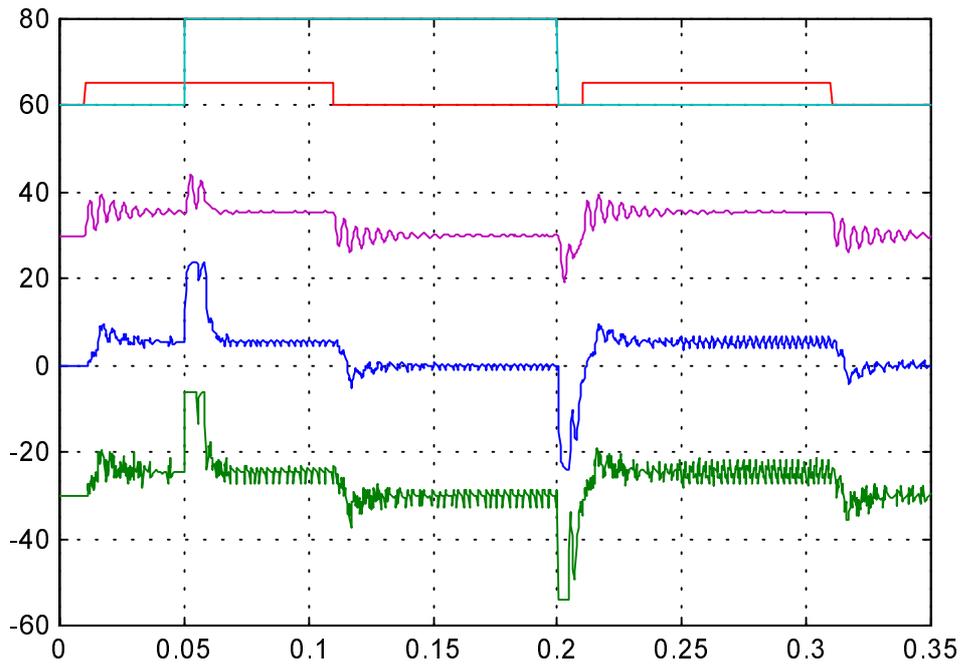
Резултати симулација који се могу видети на сликама 9 до 14, настали су симулирањем ситема који има двоструко већи моменат инерције од момента инерције који је узет за прорачун дигиталног регулатора. На основу датих симулација може се закључити да је предложена форма регулатора у потпуности задовољила критеријум робусности. Очекивани прескоци у брзини мотора леже у дозвољеним границама. Вредност момента је ограничена на $M_{emmax} = 24 \text{ Nm}$, и због уласка актуатора у zasiћење, вредност пропусног опсега система се не може сматрати оном коју одређује пол σ .



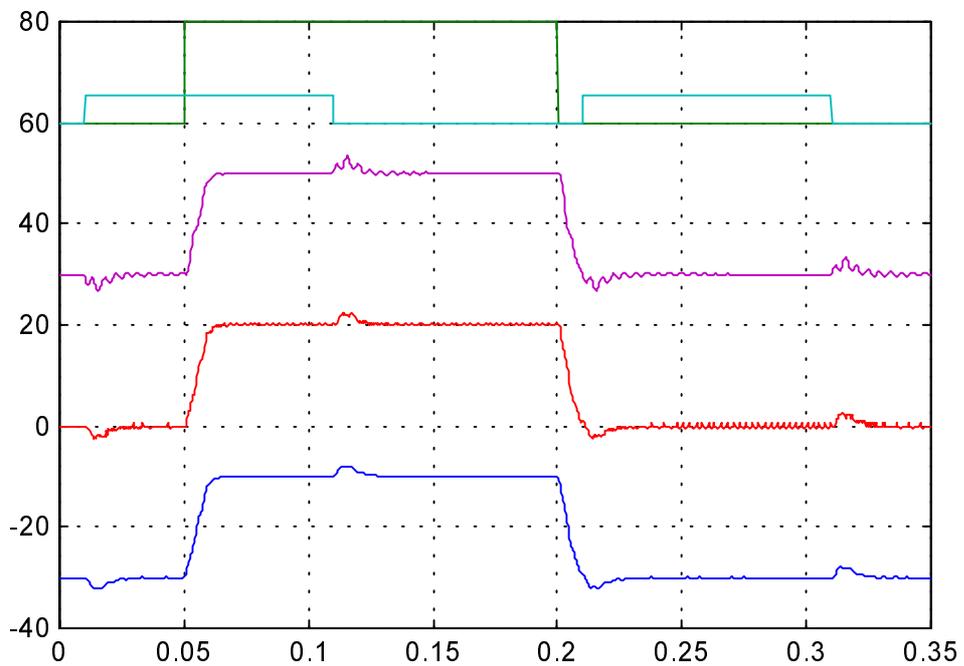
Слика 1. Моменат осовине и електромагнетски моменти ($\sigma = 0,6$, $a=0,2$)



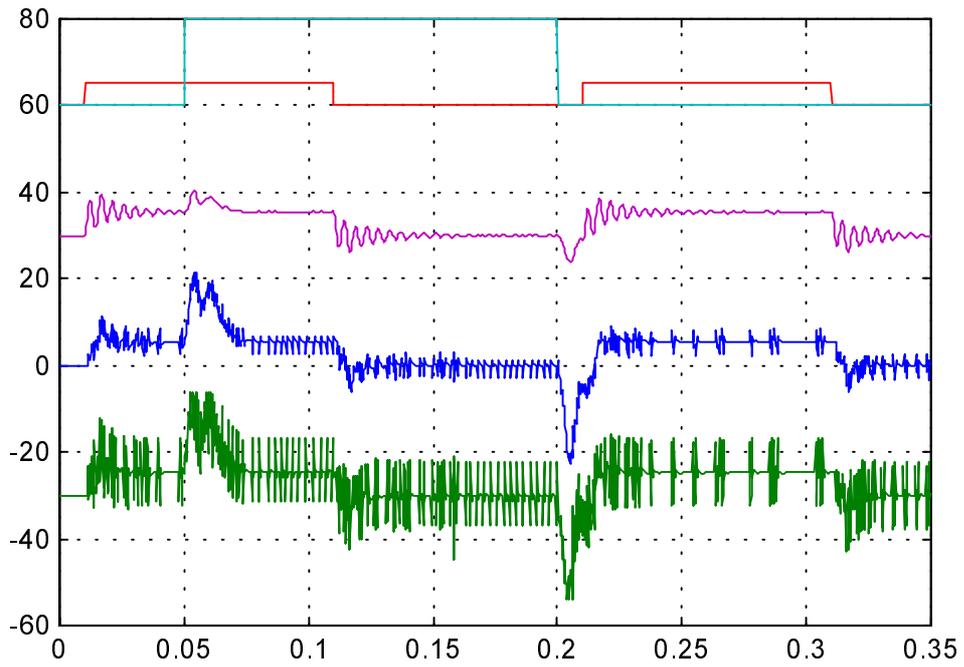
Слика 2. Брзина оптерећења, мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,6$, $a=0,2$)



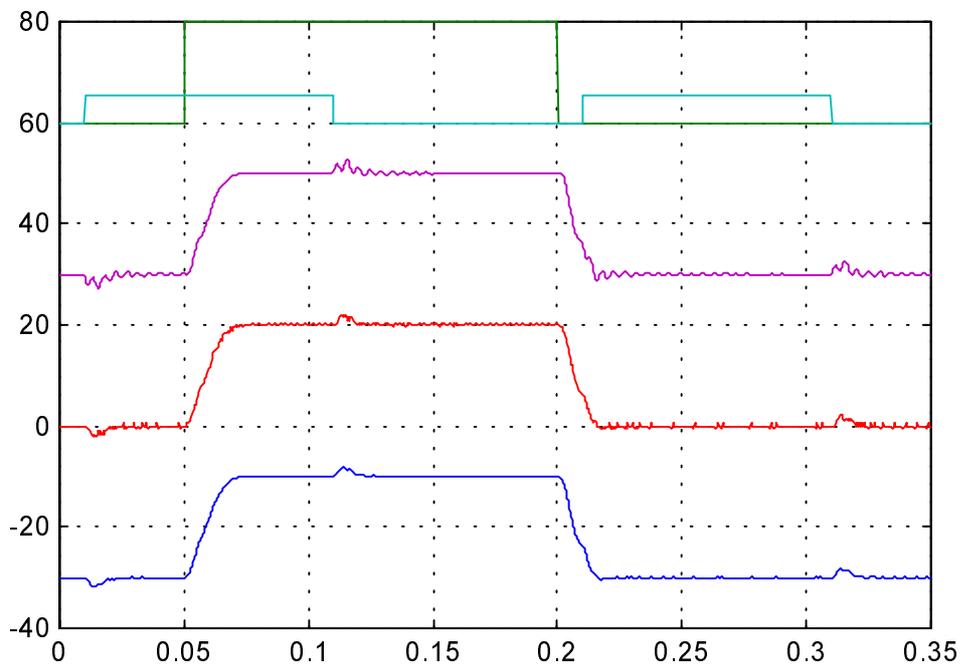
Слика 3. Моменат осовине и електромагнетски моменти ($\sigma = 0,6$, $a=0,9$)



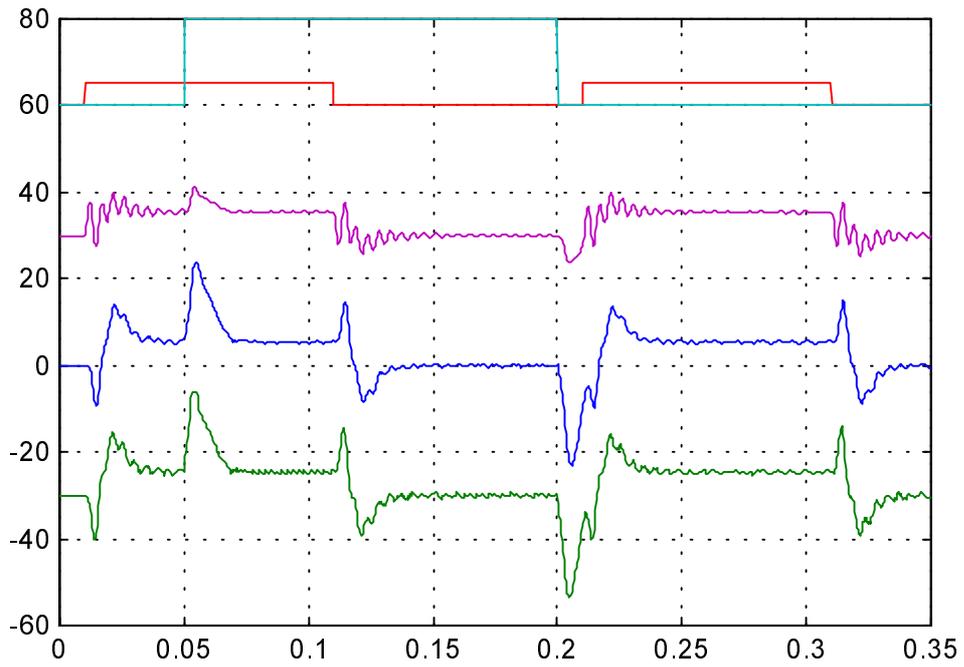
Слика 4. Брзина оптерећења, мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,6$, $a=0,9$)



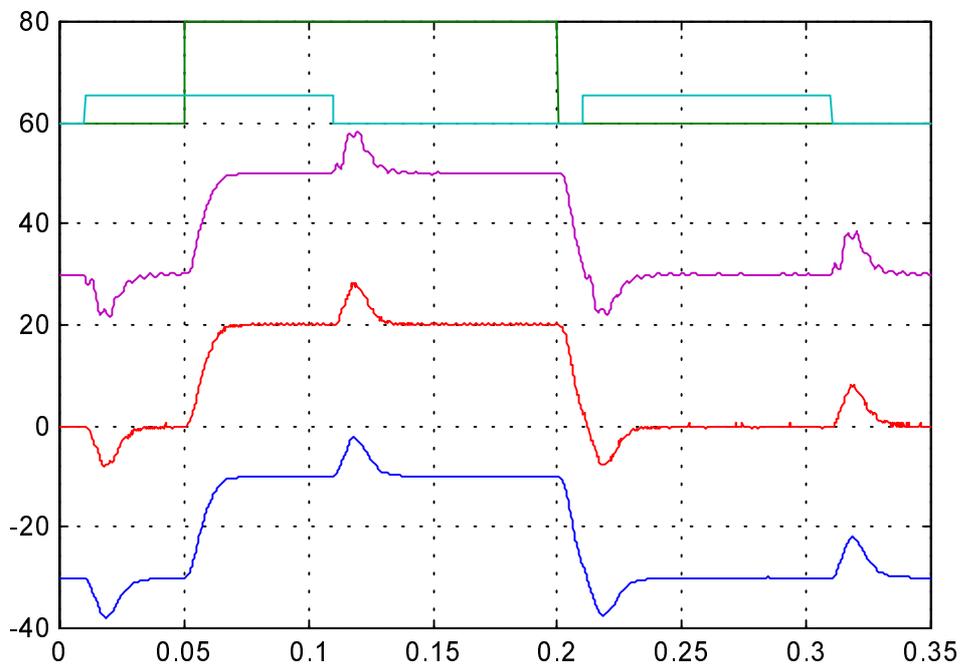
Слика 5. Моменат осовине и електромагнетски моменти ($\sigma = 0,8, a=0$)



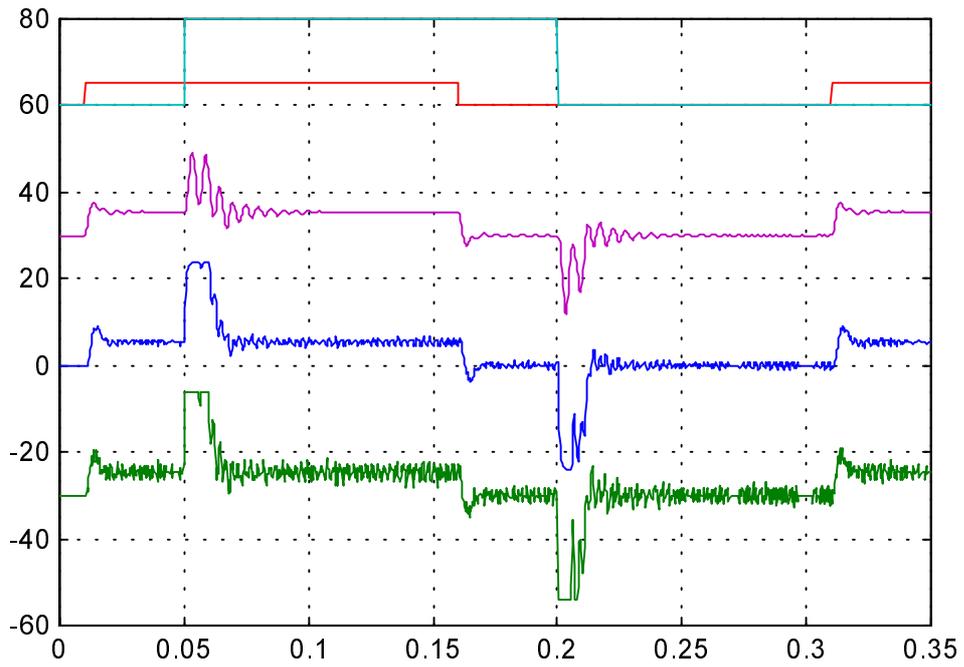
Слика 6. Брзина оптерећења, мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,8, a=0$)



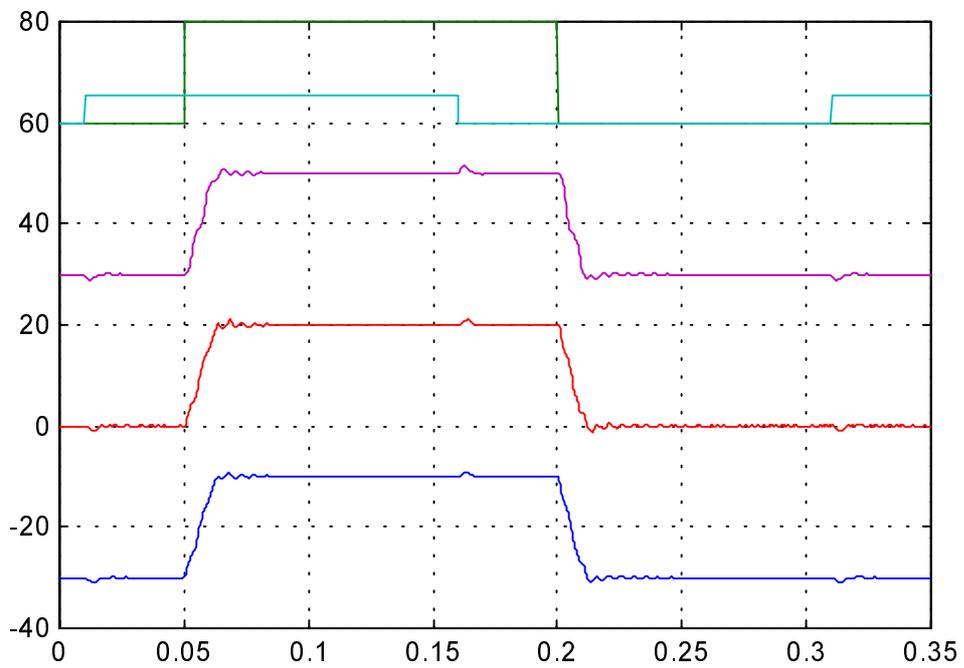
Слика 7. Моменат осовине и електромагнетски моменти ($\sigma = 0,8, a=0,9$)



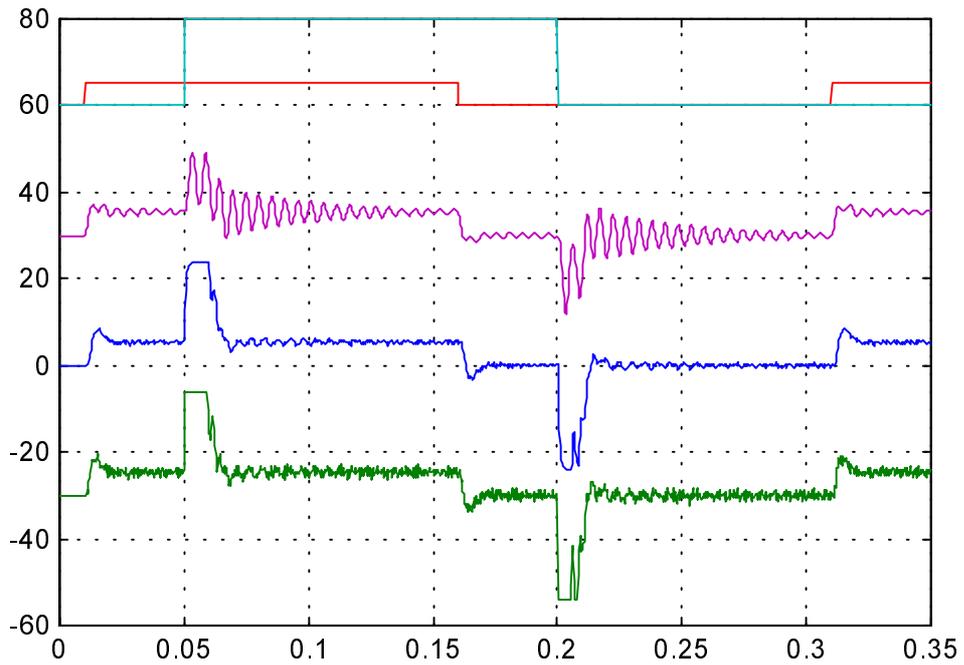
Слика 8. Брзина оптерећења, мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,8, a=0,9$)



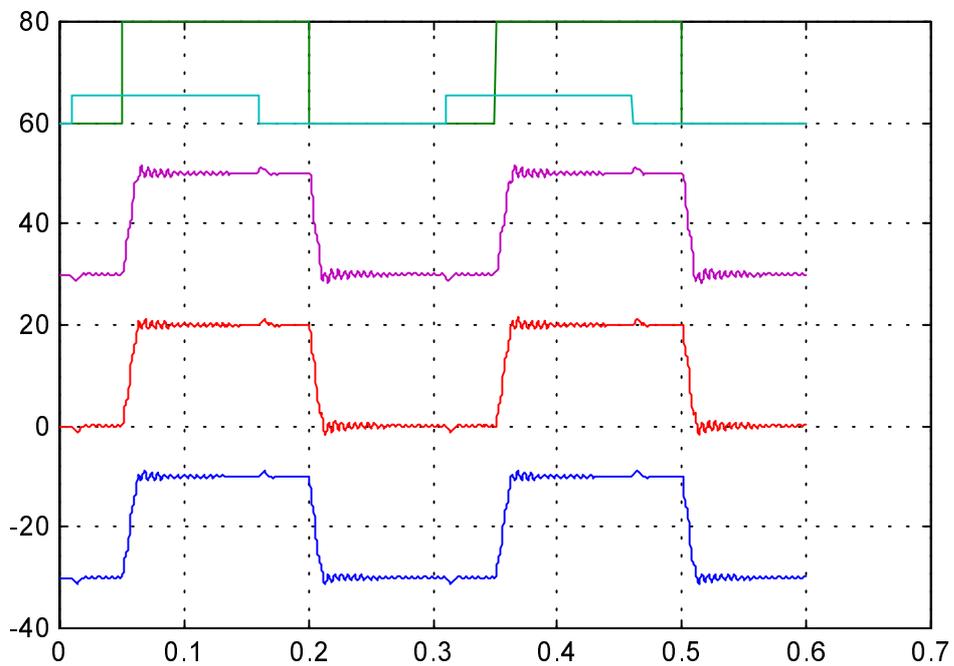
Слика 9. Моменат осовине и електромагнетски моменти ($\sigma = 0,6, a=0,6$)



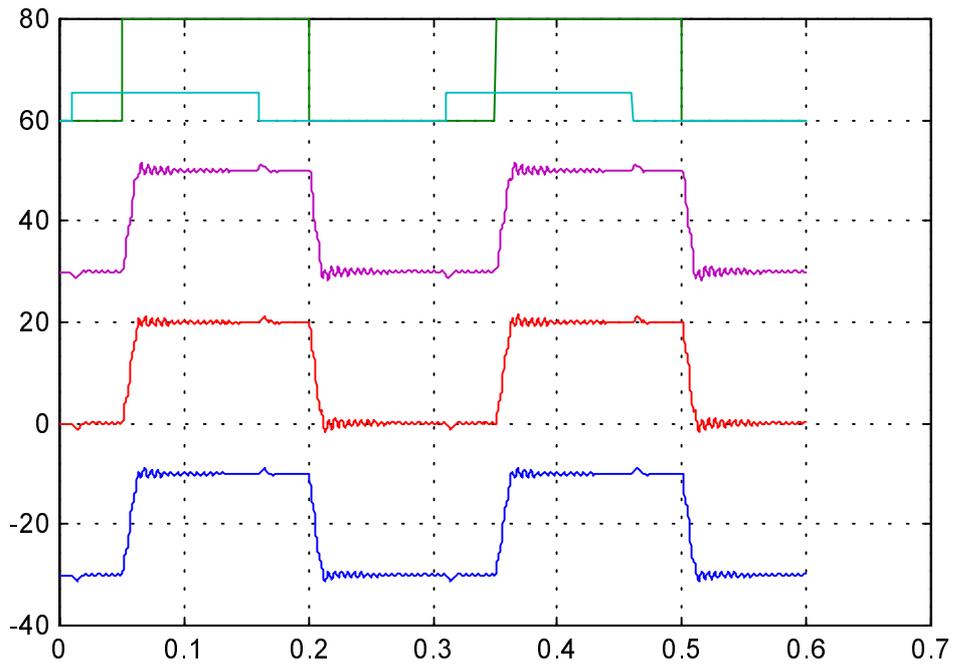
Слика 10. Брзина оптерећења, мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,6, a=0,6$)



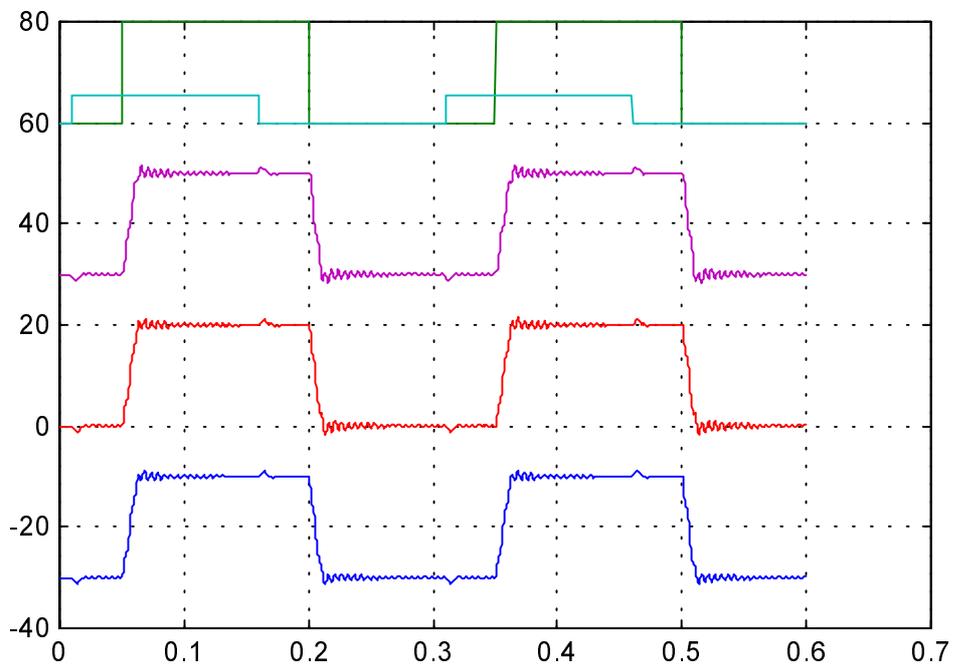
Слика 11. Моменат осовине и електромагнетски моменти ($\sigma = 0,6, a=0,7$)



Слика 12. Брзина оптерећења, мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,6, a=0,7$)



Слика 13. Моменат осовине и електромагнетски моменти ($\sigma = 0,5, a=0,8$)



Слика 14. Брзина оптерећења, мотора и измерена брзина ($\sigma = 0,5, a=0,8$)

5.3. Закључак

У овом раду је приказана форма брзинског сервомеханизма са дигиталним регулатором полиномног типа. Приликом пројектовања дигиталног регулатора узети су у обзир сви ограничавајући фактори које један реални брзински сервомеханизам може имати.

У другом поглављу дат је детаљан опис синтезе регулатора, као и приказ математичких алгоритама који се користе при синтези. Понуђени алгоритми за решење Диофантове једначине, која се јавља при синтези, омогућују директну имплементацију на дигиталном рачунару. На овај начин се елиминише *off-line* синтеза регулатора. Доказана је и тврдња да је овакав начин синтезе могућ, тј. да постоји адекватно решење регулатора у односу на преносну функцију процеса којим се управља (у овом случају брзинског сервомеханизма). Реална ограничења која се јављају у брзинском сервомеханизму описана су у трећем поглављу. То су кашњење у актуатору момента и кашњење синхроконвертора. Њихов утицај при синтези регулатора узет је као утицај кола кашњења првог реда, јер је динамика ове две компоненте исувише брза у односу на динамику осталих компонената брзинског сервомеханизма.

Приликом синтезе регулатора, постоји више степени слободе, и проблеми који се могу јавити описани су у четвртом поглављу. У овом поглављу налази се и главни допринос овог рада, а то је параметарска синтеза овог регулатора са освртом на вредност пола у систему са затвореном повратном спрегом и на вредност полова опсервера. Досадашња пракса у овој области, као и литература не дају осврт на овај проблем, који је веома битан за стабилност и робусност система са затвореном повратном спрегом. Израчунате су вредности наведених полова који ће за претпостављене параметре система којим се управља, омогућити тражене захтеве чак и у случају да се параметри система лоше процене и до 100%. Оваква тврдња поткрепљена је симулационим резултатима, који су детаљно обрађени у петом поглављу. Треба напоменути да је структура регулатора прилагођена реалним ограничењима који се такође могу јавити у брзинском сервомеханизму, а то је ограничење струјног капацитета инвертора. Такође је смањен негативан утицај ограничене резолуције давача положаја на шум у електромагнетском моменту. Овај шум додатно загрева погонски мотор чиме се перформансе система смањују.

Предложени ред филтара дигиталног регулатора оптималан, тј. минималног реда за захтеве које треба да оствари управљање брзинским сервомеханизмом. Савремени сервомеханизми имају проблеме са механичком резонанцијом која лоше утиче на рад брзинског сервомеханизма. Негативан утицај механичке резонанције такође је елиминисан погодним избором полова опсервера.

На крају треба рећи да софтверска имплементација оваквих дигиталних регулатора захтева брзе дигиталне сигналне процесоре, који су у стању да потребне алгоритме за управљање израчунају у довољно малом временском интервалу, који мора бити мањи од периоде одабирања у дигиталној петљи струјног регулатора а самим тим и од периоде одабирања у брзинској петљи. Предложена структура регулатора омогућује заједно са алгоритмима за идентификацију система адаптиван систем за управљање брзинским сервомеханизмима високих перформанси.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Слободан Вукосавић, Предавања из предмета “Микропроцесорско управљање електромоторним погонима”, Електротехнички факултет, Београд, 1996.
- [2] Karl J. Åström and Björn Wittenmark, *Computer-Controlled Systems*, Prentice Hall Internacional, Inc. 1984
- [3] Милић Р. Стојић, *Дигитални Системи Аутоматског Управљања*, Наука, Београд, 1994.
- [4] Jürgen Ackermann, *Sampled-Data Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.
- [5] Grübel, G., *Beobachter zur Reglersynthese*. Habilitations-schrift, Ruhr-Universität Bochum, July 1977.
- [6] Rolf Isermann, *Digital Control Systems, Fundamentals, Deterministic control*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1989.
- [7] Katsuhiko Ogata, *Discrete-time Control Systems*, Prentice Hall, New Jersey 1994.
- [8] Радован Љ. Радосављевић, *Динамички моменти у сложеним електромеханичким системима са асинхроним мотором*, Докторска дисертација, Београд 1994.
- [9] Stephen Barnett, *Matrices in Control Theory*, Van Nostrand Reinhold Company London, New York, Cincinnati, Toronto, Melbourne, 1971.
- [10] Ф.Р. Гантмахер, *Теорија Матриц*, Наука, Москва, 1988.
- [11] С. Вукосавић, М. Стојић, *Design of Microprocessor-Based System for Positioning Servomechanism with Induction Motor*, IEEE Transaction on Industrial Electronics (1991), vol.38, pp. 369-378
- [12] R/D Convertor, каталошки подаци

ДОДАТАК А

Коефицијенти функције преноса (4.3)**Нумератор****Коефицијент b_0**

$$E^{(-T/d)} (-T^2 - 2 T d + 2 (-1 + E^{(T/d)}) d^2) / (2 J T)$$

Коефицијент b_1

$$((1 - E^{(-T/d)} (T^2 - 4 d^2) + 2 (1 + E^{(-T/d)}) T d) / (2 J T))$$

Коефицијент b_2

$$(T^2 - 2 T d + 2 (1 - E^{(-T/d)}) d^2) / (2 J T)$$

Деноминатор**Коефицијент a_0**

$$-E^{(-T/d)}$$

Коефицијент a_1

$$1 + 2 E^{(-T/d)}$$

Коефицијент a_2

$$-2 - E^{(-T/d)}$$

Коефицијенти функције преноса (4.5)

$$\alpha = K(1+f)/(2fJ) \quad \beta = (4f(1+f)JKf - K^2(1+f)^2)^{1/2}/(2fJ)$$

Нумератор**Коефицијент b0**

$$\begin{aligned} & ((E^{-T}(2\alpha + 1/d))(-\beta((2f^3J^2 + f(1+f)JKfT^2 - 2f^2(1+f)JKd \\ & + 2f(1+f)JKfTd - (1+f)^2KKfT^2d + 2f(1+f)JKfd^2 \\ & - 2f(1+f)E^{T/d}JKfd^2 - 2(1+f)^2KKfTd^2 + (1+f)^2Kf^2T^2d^2 \\ & - 2(1+f)^2KKfd^3 + 2(1+f)^2E^{T/d}KKfd^3 \\ & + 2(1+f)^2Kf^2Td^3 + 2(1+f)^2Kf^2d^4 - 2(1+f)^2E^{T/d}Kf^2d^4) \\ & + 2f^2E^{T\alpha}J\beta(-Kd + f(J - Kd))\cos[T\beta] \\ & - f(1+f)E^{T\alpha}(fJK - (1+f)K^2d + 2fJKfd)\sin[T\beta])))/ \\ & (2T(1+f)JKf\beta(d(-K + Kfd)(1+f) + fJ)) \end{aligned}$$

Коефицијент b1

$$\begin{aligned} & ((E^{-T}(2\alpha + 1/d))(-\beta((-4f^3J^2 + 2f^3E^{2T\alpha}J^2 - 2f^3E^{T/d}J^2 \\ & + (1+f)^2JKfT^2 - f(1+f)E^{T/d}JKfT^2 + 4(1+f)f^2JKd \\ & - 2(1+f)f^2E^{2T\alpha}JKd + 2(1+f)f^2E^{T/d}JKd - 2f(1+f)JKfTd \\ & - 2f(1+f)E^{T/d}JKfTd - (1+f)^2KKfT^2d + (1+f)^2E^{T/d}KKfT^2d \\ & - 4f(1+f)^2JKfd^2 + 4f(1+f)^2E^{T/d}JKfd^2 + 2(1+f)^2KKfTd^2 \\ & + 2(1+f)^2E^{T/d}KKfTd^2 + (1+f)^2Kf^2T^2d^2 \\ & - (1+f)^2E^{T/d}Kf^2T^2d^2 + 4(1+f)^2KKfd^3 \\ & - 4(1+f)^2E^{T/d}KKfd^3 - 2(1+f)^2Kf^2Td^3 \\ & - 2(1+f)^2E^{T/d}Kf^2Td^3 - 4(1+f)^2Kf^2d^4 \\ & + 4(1+f)^2E^{T/d}Kf^2d^4) \\ & - 2\beta((E^{T\alpha}Kfd(K - Kfd)((T^2 + 2Td + 2d^2 - 2E^{T/d}d^2)) \\ & - fE^{T\alpha}Kf((T^2 + 2Td + 2d^2 - 2E^{T/d}d^2))(J - 2Kd + 2Kfd^2)) \\ & + f^3E^{T\alpha}J((J + E^{T/d}J - Kd - E^{T/d}Kd - 2Kfd^2 + 2E^{T/d}Kfd^2)) - f^2 \\ & ((E^{T\alpha}JKfT^2 + E^{T\alpha}JKd + E^{T(\alpha + 1/d)}JKd \\ & + 2E^{T\alpha}JKfTd - E^{T\alpha}KKfT^2d + 4E^{T\alpha}JKfd^2 \\ & - 4E^{T(\alpha + 1/d)}JKfd^2 - 2E^{T\alpha}KKfTd^2 + E^{T\alpha}Kf^2T^2d^2 \\ & - 2E^{T\alpha}KKfd^3 + 2E^{T(\alpha + 1/d)}KKfd^3 + 2E^{T\alpha}Kf^2Td^3 \\ & + 2E^{T\alpha}Kf^2d^4 - 2E^{T(\alpha + 1/d)}Kf^2d^4))))\cos[T\beta] \\ & + f(1+f)E^{T\alpha}(3 + E^{T/d})(fJK - K^2d - fK^2d + 2fJKfd)\sin[T\beta])))/ \\ & (2T(1+f)JKf\beta(d(-K + Kfd)(1+f) + fJ)) \end{aligned}$$

Коефицијент b_2

$$\begin{aligned}
& ((E^{(-T(2\alpha + 1/d))} ((\beta ((-2f^3 J^2 + 4f^3 E^{(2T\alpha)}) J^2 \\
& + 2f^3 E^{(T(2\alpha + 1/d))} J^2 - 4f^3 E^{(T/d)} J^2 - f(1+f) E^{(2T\alpha)} J Kf T^2 \\
& + f(1+f) E^{(T/d)} J Kf T^2 + 2f^2(1+f) J Kd - 4f^2(1+f) E^{(2T\alpha)} J Kd \\
& - 2f^2(1+f) E^{(T(2\alpha + 1/d))} J Kd + 4f^2(1+f) E^{(T/d)} J Kd \\
& - 2f(1+f) E^{(2T\alpha)} J Kf Td - 2f(1+f) E^{(T/d)} J Kf Td \\
& + (1+f)^2 E^{(2T\alpha)} K Kf T^2 d - (1+f)^2 E^{(T/d)} K Kf T^2 d \\
& - 2f(1+f)^2 J Kf d^2 - 2f(1+f)^2 E^{(2T\alpha)} J Kf d^2 \\
& + 2f(1+f)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} J Kf d^2 + 2f(1+f)^2 E^{(T/d)} J Kf d^2 \\
& + 2(1+f)^2 E^{(2T\alpha)} K Kf T d^2 + 2(1+f)^2 E^{(T/d)} K Kf T d^2 \\
& - (1+f)^2 E^{(2T\alpha)} Kf^2 T^2 d^2 + (1+f)^2 E^{(T/d)} Kf^2 T^2 d^2 \\
& + 2(1+f)^2 K Kf d^3 + 2(1+f)^2 E^{(2T\alpha)} K Kf d^3 \\
& - 2(1+f)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} K Kf d^3 - 2(1+f)^2 E^{(T/d)} K Kf d^3 \\
& - 2(1+f)^2 E^{(2T\alpha)} Kf^2 T d^3 - 2(1+f)^2 E^{(T/d)} Kf^2 T d^3 \\
& - 2(1+f)^2 Kf^2 d^4 - 2(1+f)^2 E^{(2T\alpha)} Kf^2 d^4 \\
& + 2(1+f)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} Kf^2 d^4 + 2(1+f)^2 E^{(T/d)} Kf^2 d^4)) \\
& - 2\beta ((E^{(T\alpha)} Kf d (-K + Kf d) (-T^2 + E^{(T/d)} T^2 \\
& + 2Td + 2E^{(T/d)} Td + 4d^2 - 4E^{(T/d)} d^2) \\
& + f E^{(T\alpha)} Kf (-T^2 + E^{(T/d)} T^2 + 2Td + 2E^{(T/d)} Td + 4d^2 \\
& - 4E^{(T/d)} d^2) (J - 2Kd + 2Kf d^2) \\
& - f^3 E^{(T\alpha)} (-1 + E^{(T/d)}) J (J - Kd + 4Kf d^2) + f^2 ((-E^{(T\alpha)} J Kf T^2 \\
& + E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kf T^2 - E^{(T\alpha)} J Kd + E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kd \\
& + 2E^{(T\alpha)} J Kf Td + 2E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kf Td + E^{(T\alpha)} K Kf T^2 d \\
& - E^{(T(\alpha + 1/d))} K Kf T^2 d + 8E^{(T\alpha)} J Kf d^2 - 8E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kf d^2 \\
& - 2E^{(T\alpha)} K Kf T d^2 - 2E^{(T(\alpha + 1/d))} K Kf T d^2 - E^{(T\alpha)} Kf^2 T^2 d^2 \\
& + E^{(T(\alpha + 1/d))} Kf^2 T^2 d^2 - 4E^{(T\alpha)} K Kf d^3 + 4E^{(T(\alpha + 1/d))} K Kf d^3 + 2 \\
& E^{(T\alpha)} Kf^2 T d^3 + 2E^{(T(\alpha + 1/d))} Kf^2 T d^3 + 4E^{(T\alpha)} Kf^2 d^4 \\
& - 4E^{(T(\alpha + 1/d))} Kf^2 d^4)))) \text{Cos}[T\beta] \\
& - 3f(1+f) E^{(T\alpha)} (1 + E^{(T/d)}) (fJK - (f+1)K^2 d + 2fJKf d) \text{Sin}[T\beta] \Big) \Big) / \\
& (2T(1+f)JKf\beta(d(-K + Kf d)(1+f) + fJ))
\end{aligned}$$

Коефицијент b3

$$\begin{aligned}
& ((E^{(-T(2\alpha + 1/d))} ((-\beta ((2f^3 E^{(2T\alpha)} J^2 + 4f^3 E^{(T(2\alpha + 1/d))} J^2 \\
& - 2f^3 E^{(T/d)} J^2 + f(1+f) E^{(2T\alpha)} (1 - E^{(T/d)}) J Kf T^2 \\
& - 2f^2 (1+f) E^{(2T\alpha)} J K d - 4f^2 (1+f) E^{(T(2\alpha + 1/d))} J K d \\
& + 2f^2 (1+f) E^{(T/d)} J K d - 2f(f+1) E^{(2T\alpha)} J Kf T d \\
& - 2f(f+1) E^{(T(2\alpha + 1/d))} J Kf T d - (1+f)^2 E^{(2T\alpha)} K Kf T^2 d \\
& + (1+f)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} K Kf T^2 d - 4f(1+f)^2 E^{(2T\alpha)} J Kf d^2 \\
& + 4f(1+f)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} J Kf d^2 + 2(f+1)^2 E^{(2T\alpha)} K Kf T d^2 \\
& + 2(1+f)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} K Kf T d^2 + (f+1)^2 E^{(2T\alpha)} Kf^2 T^2 d^2 \\
& - (1+f)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} Kf^2 T^2 d^2 + 4(f+1)^2 E^{(2T\alpha)} K Kf d^3 \\
& - 4(f+1)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} K Kf d^3 - 2(1+f)^2 E^{(2T\alpha)} Kf^2 T d^3 \\
& - 2(f+1)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} Kf^2 T d^3 - 4(f+1)^2 E^{(2T\alpha)} Kf^2 d^4 \\
& + 4(f+1)^2 E^{(T(2\alpha + 1/d))} Kf^2 d^4)) \\
& + 2\beta ((-E^{(T\alpha)} Kf d (-K + Kf d) ((E^{(T/d)} T^2 - 2E^{(T/d)} T d - 2d^2 \\
& + 2E^{(T/d)} d^2)) - f E^{(T\alpha)} Kf ((E^{(T/d)} T^2 - 2E^{(T/d)} T d - 2d^2 \\
& + 2E^{(T/d)} d^2)) ((J - 2Kd + 2Kf d^2)) + f^3 E^{(T\alpha)} J ((J + E^{(T/d)} J - Kd \\
& - E^{(T/d)} Kd + 2Kf d^2 - 2E^{(T/d)} Kf d^2)) - f^2 ((E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kf T^2 \\
& + E^{(T\alpha)} J Kd + E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kd - 2E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kf T d \\
& - E^{(T(\alpha + 1/d))} K Kf T^2 d - 4E^{(T\alpha)} J Kf d^2 + 4E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kf d^2 \\
& + 2E^{(T(\alpha + 1/d))} K Kf T d^2 + E^{(T(\alpha + 1/d))} Kf^2 T^2 d^2 \\
& + 2E^{(T\alpha)} K Kf d^3 - 2E^{(T(\alpha + 1/d))} K Kf d^3 - 2E^{(T(\alpha + 1/d))} Kf^2 T d^3 \\
& - 2E^{(T\alpha)} Kf^2 d^4 + 2E^{(T(\alpha + 1/d))} Kf^2 d^4)) \cos[T\beta] \\
& + f(1+f) E^{(T\alpha)} (1 + 3E^{(T/d)}) (fJK - (f+1)K^2 d + 2fJKf d) \sin[T\beta] \Big) / \\
& (2T(1+f)JKf\beta(d(-K + Kf d)(1+f) + fJ))
\end{aligned}$$

Коефицијент b4

$$\begin{aligned}
& ((E^{(T\alpha - T(2\alpha + 1/d))} ((\beta ((2f^3 E^{(T(\alpha + 1/d))} J^2 + f E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kf T^2 + \\
& f^2 E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kf T^2 - 2f^2 (f+1) E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kd \\
& - 2f(1+f) E^{(T(\alpha + 1/d))} J Kf T d - (1+f)^2 E^{(T(\alpha + 1/d))} K Kf T^2 d \\
& - 2f(1+f)^2 E^{(T\alpha)} (1 - E^{(T/d)}) J Kf d^2 \\
& + 2(1+f)^2 E^{(T(\alpha + 1/d))} K Kf T d^2 + (1+f)^2 E^{(T(\alpha + 1/d))} Kf^2 T^2 d^2 \\
& + 2(1+f)^2 E^{(T\alpha)} (1 - E^{(T/d)}) K Kf d^3 - 2(1+f)^2 E^{(T(\alpha + 1/d))} Kf^2 T d^3 \\
& - 2(1+f)^2 E^{(T\alpha)} (1 - E^{(T/d)}) Kf^2 d^4) \\
& - 2f^2 E^{(T/d)} J\beta (-Kd + f(J - Kd)) \cos[T\beta] \\
& - f(1+f) E^{(T/d)} (fJK - K^2 d - fK^2 d + 2fJKf d) \sin[T\beta] \Big) / \\
& (2T(1+f)JKf\beta(d(-K + Kf d)(1+f) + fJ))
\end{aligned}$$

Деноминатор

Коефицијент а0

$$-2 (1 + f) J K f \beta (d (-K + K f d) (1 + f) + f J)$$

Коефицијент а1

$$E^{-T} (2 \alpha + 1/d) (2 + E^{T/d} + 2 E^{T \alpha} \text{Cos}[T \beta])$$

Коефицијент а2

$$-E^{-T} (2 \alpha + 1/d) (1 + E^{2 T \alpha} + 2 E^{T/d} + 2 E^{T \alpha} (2 + E^{T/d}) \text{Cos}[T \beta])$$

Коефицијент а3

$$1 + E^{-2 T \alpha} + 2 E^{-T/d} + (4 E^{-T \alpha} + 2 E^{-T (1/d + \alpha)}) \text{Cos}[T \beta]$$

Коефицијент а4

$$-2 - E^{-T/d} - 2 E^{-T \alpha} \text{Cos}[T \beta]$$

ДОДАТАК Б

Командни фајл за иницијализацију и израчунавање коефицијената дигиталног регулатора за систем трећег реда

```

%*****
%***** PARAMETRI SISTEMA *****
J=0.00062; %moment inercije motora
T=0.0003; %perioda odabiranja
d=0.0006; %kasnjenje aktuatora momenta
%*****

%***** FUNKCIJA PRENOSA KONTINUALNOG SISTEMA *****
akt=tf(1,[d,1]); %kasnjenje aktuatora momenta 1/(s*d+1)
[Na,Da]=tfdata(akt,'v'); %num_den f-je prenosa "akt"
mem_pos=tf(1,[J,0,0]); %pozicija 1/(J*s^2)
[Np,Dp]=tfdata(mem_pos,'v'); %num_den f-je prenosa "mem_pos"
Nc=1; %numerator f-je prenosa kontinualnog sistema
Dc=conv(Da,Dp); %denominator f-je prenosa kontinualnog
sistema
sys3c=tf(Nc,Dc); %zadavanje f-je prenosa u s-domenu
%*****

%***** DISKRETIZACIJA KONTINUALNOG SISTEMA *****
%***** SA T=0.0003s I KOLOM ZADR. 0-rd *****
sys3d=c2d(sys3c,T); %diskretizacija sistema
[N,D]=tfdata(sys3d,'v'); %numerator i denominator f-je
diskretnog prenosa
b=roots(N); %nule sistema N=N(2)*(z-b(1))*(z-b(2))
B=N/T; %B/A=(z/(z-1))*(N/D)*((z-1)/(z*T))
A=D;
beta=0; %stepen polinoma R je deg(A)+beta-1

%PRORACUN REDA POLINOMA (FILTARA) I OPSERVERA
%degA0=2*(degA)+beta-(degAm)-(degBi)-1=2*3+0-3-0-1=2
%=> A0=(z-a)^2
%degR=degA+beta-1=3+0-1=2
%degS=degA-1=2
Bi=[1];
Bo=B;
k=0.4; %visestruki pol sistema sa zatvorenom povratnom
spregom (SZPS)
Am=conv([1,-2*k,k^2],[1,-k]); %denominator SZPS
a=0.9;%pol opservera
A0=[1,-2*a,a^2]; %polinom opservera
C=conv(conv(Bi,A0),Am);
diofant; %pozivanje potprograma za resavanje Diofantove j-ne
open_system('rst3vact');
t=((1-k)^3/(B(2)*(1-b(1))*(1-b(2))))*A0;
Gss=tf(conv(B,t),C);%ulaz-izlaz
pzmap(Gss)
sim('rst3vact')

```

Командни фајл за иницијализацију и унос података за симулацију система петог реда

```

%*****
%***** PARAMETRI SISTEMA *****
J=0.00062; %moment inercije motora
T=0.0003; %perioda odabiranja
d=T; %kasnjenje aktuatora momenta
K=0.004; %koeficijent torzije
Kf=350; %koeficijent frikcije
f=11/31; %odnos m_inerc_mot i m_inerc_opt f=Jl/Jm
%*****

%*****
%***** FUNKCIJA PRENOSA KONTINUALNOG SISTEMA *****
akt=tf(1,[d,1]); %kasnjenje aktuatora momenta 1/(s*d+1)
[Na,Da]=tfdata(akt,'v'); %num_den f-je prenosa "akt"
mem_pos=tf(1,[J*(1+f),0,0]); %pozicija 1/(J*s^2)
[Np,Dp]=tfdata(mem_pos,'v'); %num_den f-je prenosa "mem_pos"
meh=tf([f*J,K,Kf],[f/(f+1)*J,K,Kf]); %mehanicki podsystem
[Nm,Dm]=tfdata(meh,'v'); %num_den f-je prenosa "meh"
Nc=Nm; %numerator f-je prenosa kontinualnog sistema
Dc=conv(conv(Da,Dp),Dm); %den f-je prenosa kontinualnog
sistema
sys5c=tf(Nc,Dc); %zadavanje f-je prenosa u s-domenu
%*****

%*****
%***** DISKRETIZACIJA KONTINUALNOG SISTEMA *****
%***** SA T=0.0003s I KOLOM ZADR. 0-rd *****
sys5d=c2d(sys5c,T); %diskretizacija sistema
[N,D]=tfdata(sys5d,'v'); %num i den f-je diskretnog prenosa
b=roots(N); %nule sistema N=N(2)*(z-b(1))*(z-b(2))*(z-
b(3))*(z-b(4))
a=roots(D); %polovi D=(z-a(1))*(z-a(2))*(z-a(3))*(z-a(4))*(z-
a(5))
B=N/T; %B/A=(z/(z-1))*(N/D)*((z-1)/(z*T))
A=D;
beta=0; %stepen polinoma R je deg(A)+beta-1

%F-JA PRENOSA SZPS
%Bm=(1-k)^6; numerator f-je prenosa SZPS
%Am=(z-k)^6; denominator f-je prenosa SZPS

%PRORACUN REDA POLINOMA (FILTARA) I OPSERVERA
%degA0=2*(degA)+beta-(degAm)-(degBi)-1=2*5+0-5-1=4
%=> A0=((z-k1)^2+k2^2)*(z-a)
%degR=degA+beta-1=5+0-1=6
%degS=degA-1=4

ao=0.8;
%A0=conv([1,-2*real(a(1)),abs(a(1))^2],[1,-2*ao,ao^2]); %tacan
obs

```

```

A0=conv([1,-2*0.9,0.9^2+0.4^2],[1,-2*ao,ao^2]);%polinom
opservera
%A0=conv([1,-2*ao,0.99^2],[1,-2*ao,ao^2]);%polinom opservera
Bi=[1];
Bo=B;
k=0.5; %visestruki pol sistema sa zatvorenom povratnom
spregom (SZPS)
Am=conv(conv([1,-2*k,k^2],[1,-k]),[1,-2*k,k^2]); %denominator
SZPS
C=conv(conv(Bi,A0),Am);
diofant;
%open_system('rst5vact');
%t=((1-k)^5/(B(2)*(1-b(1))*(1-2*real(b(2))+abs(b(2))^2)*(1-
b(4))))*A0;
%Gss=tf(conv(B,t),C);%ulaz-izlaz
%sl=tf(conv(A,R),conv(A,R)+conv(B,S));%os u-i
%pzmap(Gss)
%sim('rst5vact')

```

Потпрограм за израчунавање Диофантове једначине

```

%*****
%***
%*** POTPROGRAM ZA IZRACUNAVANJE DIOFANTOVE JEDNACINE *****
%***
%*****
%
% diofant.m
%
% Milun Perisic, Beograd 2001.
%
% Nalazenje resenja Diofantove jednacine
%   A(z) * R(z) + B(z) * S(z) = C(z)
% Ulazi:
%   (A(z),B(z)) su polinomni sistema (nema zajednickih
faktora),
%   A: [z^n + a_n-1 * z^n-1 + ... + a_1 * z + a_0]
%       denominator f-je diskretnog prenosa sistema, reda
%       n+1
%   B: [s^m + b_m-1 * s^m-1 + ... + b_1*s^1 + b_0 * s^0]
%       numerator f-je diskretnog prenosa sistema reda m+1
%       gde je m<=n zbog kauzalnosti
%
%   Polinom C predstavlja lokaciju polova sistema sa
%   zatvorenom povratnom spregom
%
%   C: [z^p + c_p-1 * z^p-1 + ... + c_1 * z + p_0]
%       i reda je 2*n
%
% R,S su polinomi filtara regulatora
% Parametar "beta" govori o redu polinoma R(z)
% Red R je n-1, a red S je n-1-beta.

```

```

n = length(A)-1+beta;

r = zeros(1,length(C)-length(A));
s = zeros(1,length(A)-1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% provera dimenzija polinoma B u odnosu na polinom A %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if length(B)>length(A)
    disp('Stepen polinoma B mora biti <= od stepena polinoma
    A');
    return;
else
    %A
    %B
    tempB = [zeros(1,length(A)-length(B)+beta) B];
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% provera dimenzija matrice C %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if length(C)~=2*(length(A)-1)+beta
    disp('Red C nije tacan!');
    disp(strcat('Red treba da bude: ',num2str(2*(length(A)-
    1)+beta)));
    disp(strcat('Red C je: ',num2str(length(C))));
    return;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% resavanje Diofantove jednacine %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear SILV
for j=1:n
    SILV(:,j) = [zeros(j-1,1); A'; zeros(n-j,1)];
    for i=1:n-beta
        SILV(:,i+n) = [zeros(i-1,1); tempB'; zeros(n-i-beta,1)];
    end
end
solution = inv(SILV)*C';
R=solution(1:n)';
S=solution(n+1:2*(length(A)-1)+beta)';

```